

# Numerische Turbulenz



DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

dem Fachbereich Physik  
der Philipps-Universität Marburg  
vorgelegt

von  
**Achim Reeh**  
aus Bad Marienberg

Marburg/Lahn 1999

Vom Fachbereich Physik der  
Philipps-Universität als  
Dissertation angenommen am: 01.04.1999

Erstgutachter: Prof. Dr. Siegfried Großmann

Zweitgutachter: Prof. Dr. Detlef Lohse

Tag der mündlichen Prüfung: 07.06.1999

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Beschreibung und Berechnung turbulenter Strömungen</b>	<b>3</b>
2.1	Zielsetzung . . . . .	3
2.2	Grundsätzliche Begriffe . . . . .	4
2.3	Darstellung des numerischen Verfahrens . . . . .	5
2.4	Überprüfung der Isotropie . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Das Auswerteverfahren Extended Self Similarity (ESS)</b>	<b>11</b>
3.1	Einführung . . . . .	11
3.2	Batchelor-Parametrisierung der Strukturfunktionen . . . . .	12
3.3	Die Anwendung von ESS . . . . .	15
3.4	Kompensierte ESS-Darstellungen . . . . .	16
3.5	Longitudinale und transversale Strukturfunktionen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Der Übergang von der vollen zur modenreduzierten Simulation (REWA)</b>	<b>21</b>
4.1	Implementation der Modenausdünnung . . . . .	21
4.2	Flatness und Skewness der Geschwindigkeitsableitungen . . . . .	22
4.3	Kompensierte ESS-Darstellungen . . . . .	22
4.4	Verallgemeinerte ESS-Darstellungen . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Unterschiedliche Intermittenz der longitudinalen und transversalen Fluktuationen</b>	<b>29</b>
5.1	Die experimentelle Situation . . . . .	29
5.2	Kompensierte ESS-Darstellungen . . . . .	30
5.3	Verallgemeinerte ESS-Darstellungen . . . . .	32
5.4	Untersuchung der Hierarchien . . . . .	36

5.5	REWA-Ergebnisse bei hohen Reynoldszahlen . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Irreduzible <math>SO(3)</math>-Amplituden</b>	<b>41</b>
6.1	Einführung . . . . .	41
6.2	Numerische Ergebnisse . . . . .	42
6.3	Batchelor-Parametrisierung . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Mehrskalengkorrrelationsfunktionen</b>	<b>49</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	49
7.2	Korrrelationsfunktionen mit Gradienten . . . . .	50
7.3	Kompensierte Darstellungen . . . . .	52
7.4	Bedingte Mittelwerte . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Ausblick</b>	<b>59</b>

---

# 1 Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit werden verschiedene Aspekte des intermittenten Verhaltens der Geschwindigkeitsfluktuationen in einer turbulenten und im statistischen Sinn stationären, homogenen, isotropen Strömung untersucht. Dazu wird die dreidimensionale inkompressible Navier-Stokes-Gleichung numerisch simuliert.

In Kapitel 2 wird in die Problemstellung eingeführt, die verwendete Simulationstechnik dargestellt sowie die allen Untersuchungen zugrunde liegende Isotropie der numerischen Strömung überprüft.

In Kapitel 3 wird die Auswertemethode der Extended Self Similarity (ESS) sehr genau untersucht. Diese ist ein gebräuchliches Mittel zur Bestimmung des Potenzgesetzverhaltens der Geschwindigkeitsstrukturfunktionen, vor allem, wenn aufgrund von noch nicht genügend entwickelter Turbulenz die Strukturfunktionen in Abhängigkeit vom Ort noch kein klares Skalenverhalten zeigen. In dieser Arbeit wird herausgestellt, dass es für die Anwendung von ESS erforderlich ist, die mit dem Absolutbetrag definierte Strukturfunktion dritter Ordnung zu benutzen, anstatt die gewöhnliche vorzeichenbehaftete Strukturfunktion  $D_3(r)$ . Bei dieser Vorgehensweise stellt sich ESS hin zu größeren Skalen ein, beginnend bei etwa  $10\eta$ , wobei  $\eta$  die Kolmogoroff-Skala ist, im Gegensatz zur Anwendung von  $D_3$ . Weiterhin wird die ESS-Methode innerhalb der Batchelor-Parametrisierung für die Strukturfunktionen zweiter und dritter Ordnung analysiert. Dabei wird auch ein Augenmerk auf die transversale Strukturfunktion gerichtet. Ab einer Taylor-Reynoldszahl von etwa  $Re_\lambda \approx 500$  entwickelt sich ein Skalenverhalten im Inertialbereich.

In Kapitel 4 wird für die REWA-Methode (*reduced wave vector set approximation*) bei  $Re_\lambda \approx 100$  systematisch untersucht, wie sich die Skaleneigenschaften ändern, wenn man den Grad der Wellenvektorausdünnung variiert. Es wird der Übergang von einer vollen numerischen Simulation zu deren REWA-Approximation durchgeführt. Ziel ist, den Ursprung von Intermittenz-Skalenkorrekturen besser zu verstehen. In der vorliegenden Analyse konnten keine VSR-Effekte auf die ISR-Skalenexponenten gefunden werden. Die ausreichende lokale Phasenraumauflösung stellt den Schlüssel zum korrekten Erhalt der Skalenkorrekturen dar.

In Kapitel 5 wird die Intermittenz in longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen verglichen. Dabei zeigt sich, dass die transversalen Geschwindigkeitsfluktuationen signifikant stärkere Intermittenz zeigen als die longitudinalen. Die numerischen Werte für die longitudinalen und transversalen Skalenexponenten bei getriebener, stationärer Turbulenz stimmen sehr gut mit den Ergebnissen von zerfallender Turbulenz [28] überein. Dieses Resultat ist zumindest für die untersuchten kleinen  $Re_\lambda$  unabhängig von der Reynoldszahl. Die Untersuchung einer anisotropen Strömung ergibt im wesentlichen die gleichen Skalenexponenten. Bei einer gleichfalls

durchgeführten REWA-Rechnung bei  $Re_\lambda = 1.4 \cdot 10^5$ , die natürlich die kleinskaligen Strukturen im turbulenten Feld unterrepräsentiert, finden sich keine statistisch signifikanten Abweichungen zwischen longitudinalen und transversalen Skalenkorrekturen. Jedoch ist der relative Fehler viel größer als bei den vollen Simulationen. Generalized Extended Self Similarity (GESS) ist mit befriedigender Genauigkeit sowohl für longitudinale als auch transversale Strukturfunktionen erfüllt, wobei jedoch die GESS-Skalenexponenten und die dazugehörigen She-Leveque-Hierarchie-Parameter unterschiedlich sind.

In Kapitel 6 werden die Skaleneigenschaften der  $SO(3)$ -irreduziblen Amplituden des Geschwindigkeits-Struktur tensors numerisch untersucht, und es wird für die Momente vierter Ordnung gezeigt, wie sie mit den longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen zusammenhängen. Dabei wird deutlich, dass entweder die  $SO(3)$ -irreduziblen Amplituden oder aber die longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen ein nichttriviales Skalenverhalten bei endlichen Reynoldszahlen zeigen können, auf keinen Fall jedoch beide gleichzeitig, da sie Linearkombinationen voneinander sind.

In Kapitel 7 werden Mehrskalenkorrelationsfunktionen numerisch untersucht. Die von L'vov et al. [78] gemachten Voraussagen über das Skalenverhalten von Korrelationsfunktionen, die gleichzeitig Geschwindigkeitsdifferenzen für Abstände aus dem Inertialbereich und dem viskosen Bereich enthalten, wurden zum Teil numerisch bestätigt.

Der überwiegende Teil der oben angeführten Ergebnisse ist bereits publiziert [21, 22, 30, 57].

---

## 2 Beschreibung und Berechnung turbulenter Strömungen

---

### 2.1 Zielsetzung

Eines der zentralen Anliegen der Turbulenzforschung ist, die Frage zu klären, ob die Geschwindigkeits-Strukturfunktionen  $D_p(r)$  im Limes großer Reynoldszahlen von dem klassischen algebraischen Skalenverhalten  $D_p(r) \propto r^{p/3}$ , welches von Kolmogoroff aufgrund einer Dimensionsanalyse postuliert wurde [2, 4], abweichen. Die Energiedissipationsrate  $\epsilon(\mathbf{x}, t)$  zeigt nämlich ein intermittentes, räumlich und zeitlich lokalisiertes Verhalten. Da diese nichtlinear in die Strukturfunktionen eingeht, stellt sich die Frage, ob das zu Korrekturen der aus der Dimensionsanalyse gewonnenen Ergebnisse führt. Viele Jahre lang hat man sich mit den longitudinalen Strukturfunktionen beschäftigt, vor allem, weil sie experimentell unter Zuhilfenahme der Taylorschen Frozen-Flow-Hypothese [1–3] bestimmt werden konnten. Durch den Fortschritt der Messtechnik gibt es in jüngerer Zeit auch Untersuchungen zu den transversalen Strukturfunktionen [67–72].

Numerische Simulationen der der Hydrodynamik zugrunde liegenden Navier-Stokes-Gleichungen ermöglichen prinzipiell die Untersuchung jeder beliebigen interessanten Größe. Allerdings lassen die heutige als auch die kommende Generation von Computern die Simulation von hochturbulenten Strömungen bei Reynoldszahlen, die mit dem Experiment vergleichbar sind, nicht zu, da die Zahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade mit der Taylor-Reynoldszahl  $Re_\lambda$  wie  $Re_\lambda^{9/2}$  ansteigt [1, 2]. Aus diesem Grund beschränkt man sich oft auf Modelle und Approximationen der Navier-Stokes-Dynamik mit reduzierter Zahl von Freiheitsgraden. Als ein sehr gut untersuchtes Modellsystem ist zum Beispiel das Gledzer-Yamada-Ohkitani-Schalenmodell (GOY) zu nennen [7–9]. Näher an der eigentlichen Navier-Stokes-Dynamik ist jedoch die dazugehörige *reduced wave vector set approximation* (REWA) [10–15]. Diese benutzt eine reduzierte, geometrisch skalierende Untermenge von Wellenvektoren, auf denen die Navier-Stokes-Gleichung gelöst wird. Damit konnten sehr hohe Taylor-Reynoldszahlen bis zu  $Re_\lambda = 1.4 \cdot 10^5$  erreicht werden [12–14].

Ein Problem in direkten numerischen Rechnungen ist die Berücksichtigung der physikalischen Berandung des Simulationsgebietes, die in Experimenten natürlicherweise vorhanden ist. Dies verlangt nämlich eine sehr feine Randauflösung, die bei hohen  $Re_\lambda$  numerisch sehr aufwendig ist. Sowohl die meisten direkten numerischen Simulationen (DNS) als auch die Verfahren GOY und REWA enthalten keinen expliziten Rand, sondern verwenden periodische Randbedingungen. Die Energieeinfütterung in das System geschieht dann nicht mehr über äußere Randbedingungen wie Scherkräfte oder Druckgefälle, sondern über eine Volumenkraft, bei der wie z.B. in der vorliegenden Arbeit Energie deterministisch in die Moden mit kleiner Wellenzahl eingespeist

wird. Es wird bei dieser Vorgehensweise die sogenannte Bulk-Turbulenz untersucht: Man befindet sich in der Mitte einer turbulenten Strömung weit weg vom Rand, und es wird angenommen, dass Effekte von der Randschicht her keinen Einfluss auf die Mitte haben.

## 2.2 Grundsätzliche Begriffe

Ziel der Untersuchungen sind verschiedene statistische Eigenschaften der Geschwindigkeitsdifferenzen  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  in einer turbulenten, inkompressiblen Strömung. Man betrachtet dazu die longitudinalen Strukturfunktionen der Ordnung  $p$

$$D_p^L(r) = \langle \{[\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{e}_r^L\}^p \rangle \quad (2.1)$$

sowie die transversalen Strukturfunktionen der Ordnung  $p$

$$D_p^T(r) = \langle \{[\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{e}_r^T\}^p \rangle. \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\mathbf{e}_r^L$  der Einheitsvektor in  $\mathbf{r}$ -Richtung. Der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_r^T$  steht senkrecht auf  $\mathbf{e}_r^L$ . Die Mittelung dieser und aller folgender statistischen Größen geschieht über den Raum  $\mathbf{x}$  und die Zeit  $t$ .

Im turbulenten Fall entwickelt sich für beide Arten von Strukturfunktionen im Inertialbereich (ISR), d.h.  $\eta \ll r \ll L$ , wobei  $\eta$  die Kolmogorofflänge und  $L$  eine typische äußere Längenskala bezeichnet, ein Potenzgesetzverhalten mit den Skalenexponenten  $\zeta_p^{L,T}$ :

$$D_p^L(r) \propto r^{\zeta_p^L}, \quad D_p^T(r) \propto r^{\zeta_p^T}. \quad (2.3)$$

Die Exponenten  $\zeta_p^L$  ergeben sich laut Dimensionsanalyse von Kolmogoroff [4] zu  $\zeta_p^L = p/3$ . Experimentell und numerisch gefundene Abweichungen von diesem Verhalten werden als Intermittenzkorrekturen  $\delta\zeta_p^{L,T}$  bezeichnet:

$$\delta\zeta_p^{L,T} = \zeta_p^{L,T} - p/3. \quad (2.4)$$

Für isotrope, homogene, inkompressible Turbulenz stehen longitudinale und transversale Strukturfunktion im Fall  $p = 2$  in folgender Beziehung

$$D_2^T(r) = D_2^L(r) + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} D_2^L(r). \quad (2.5)$$

Diese wird im nächsten Abschnitt zur Überprüfung der Isotropie der Strömung verwendet. Die longitudinale Strukturfunktion dritter Ordnung genügt der Howard-von-Karman-Kolmogoroff-Strukturgleichung [1]

$$D_3^L(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r + 6\nu \frac{d}{dr} D_2^L(r). \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\epsilon = \langle \epsilon(\mathbf{x}, t) \rangle$  die mittlere Energiedissipationsrate und  $\nu$  die kinematische Viskosität der strömenden Flüssigkeit. Eine ebenfalls wichtige statistische Größe ist

die Strukturfunktion  $D_p^M(r)$ , die mit dem kompletten Geschwindigkeitsdifferenzenvektor berechnet wird und folgendermaßen definiert ist:

$$D_p^M(r) = \langle |\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^p \rangle. \quad (2.7)$$

Für  $p = 2$  gilt die Zerlegung

$$D_2^M(r) = D_2^L(r) + 2D_2^T(r). \quad (2.8)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (2.5) der folgende Zusammenhang zwischen  $D_2^M(r)$  und  $D_2^L(r)$ :

$$D_2^M(r) = 3D_2^L(r) + r \frac{d}{dr} D_2^L(r). \quad (2.9)$$

## 2.3 Darstellung des numerischen Verfahrens

Für die Numerik betrachtet man die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung (NSE) in der Rotationsform, um das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und den Druck  $p(\mathbf{x}, t)$  in einem Würfel mit der Kantenlänge  $2\pi L$  zu berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \left( p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  die Vortizität. Da periodische Randbedingungen angenommen werden, d.h. kein physikalischer Rand existiert, wird durch den  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ -Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.10) Energie auf großen Skalen in das System eingespeist. Die Inkompressibilität spiegelt sich in der Divergenzfreiheit

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.11)$$

wider. Alle vorkommenden Felder werden in eine Fourier-Reihe entwickelt, so gilt z.B. für  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in K} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.12)$$

Die Menge  $K$  wird später definiert. Aus den Gleichungen (2.10) und (2.11) ergibt sich damit im Wellenzahlraum

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_{\mathbf{k}} - \nu k^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{k}, t). \quad (2.13)$$

Dabei ist der Tensor  $\mathbf{P}(\mathbf{k})$  der Projektor auf den Raum der solenoidalen Felder und definiert als

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (2.14)$$

Die obige Gleichung (2.13) wird mit Hilfe eines Pseudospektralverfahrens gelöst [5, 6]. Dabei wird der nichtlineare Term  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  im Ortsraum berechnet und anschließend mit einer Fast Fourier Transformation wieder in den Wellenzahlraum zurücktransformiert. Die Zeitintegration geschieht mittels eines Finite-Differenzen-Schema zweiter Ordnung. Dazu werden der nichtlineare Term sowie der Energieeinfütterungs-Term

mit der Adams-Bashforth-Methode<sup>1</sup> (AB2) integriert. Der dissipative Term wird exakt<sup>2</sup> integriert. Um die Simulation zu starten, wird ein Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung benutzt. Die Diskretisierung bei einem Zeitschritt  $\delta t$  ergibt sich als

$$\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^n e^{-\nu k^2 \delta t}}{\delta t} = \mathbf{P}(\mathbf{k}) \cdot \left[ \frac{3}{2} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_{\mathbf{k}}^n e^{-\nu k^2 \delta t} - \frac{1}{2} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_{\mathbf{k}}^{n-1} e^{-2\nu k^2 \delta t} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}}^n e^{-\nu k^2 \delta t} \right]. \quad (2.15)$$

Um den Energieverlust durch Dissipation auszugleichen und einen stationären Zustand herzustellen, muss ständig Energie in das System eingespeist werden. Dazu wird auf der äußeren Längenskala  $L$  die deterministische Antriebskraft  $\mathbf{f}(\mathbf{k}, t)$  verwendet:

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) = \epsilon \frac{\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)}{\sum_{\mathbf{q} \in K_{in}} |\mathbf{u}(\mathbf{q}, t)|^2} \quad \text{für } \mathbf{k} \in K_{in}, \quad (2.16)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) = 0$  sonst.  $K_{in}$  ist die Menge der angetriebenen Moden. Für deren Wellenvektoren gilt für die isotrope Simulation (im folgenden mit I bezeichnet):  $K_{in}L = \{(0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$  sowie die Permutationen davon}. Die explizit anisotrope Rechnung (A) benutzt  $K_{in}L = \{(0, 0, \pm 1)\}$ .  $\epsilon$  ist die mittlere Energiedissipationsrate. Wie man leicht nachrechnen kann, ist mit obiger Kraft die mittlere Rate der Energieeinspeisung im stationären Fall  $\epsilon_{in} = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle = \epsilon$ .

Um numerische Simulationen durchführen zu können, werden dimensionslose Einheiten festgelegt. Längen werden in Einheiten von  $L$  und Zeiten in Einheiten von  $L^{2/3} \epsilon^{-1/3}$  gemessen. Dadurch ergibt sich für die dimensionslose Dissipationsrate  $\epsilon$  ein Wert von 1. Die Viskosität als einziger Parameter in Gleichung (2.10) ist in diesen Einheiten  $\nu = (\eta/L)^{4/3}$ , mit der Kolmogoroff-Länge  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ . Die Reynoldszahl  $Re$  wird folgendermaßen definiert:

$$Re = \frac{u_{1,rms} L}{\nu}. \quad (2.17)$$

Für die Taylor-Reynoldszahl  $Re_\lambda$  gilt die Beziehung

$$Re_\lambda = \frac{u_{1,rms} \lambda}{\nu}, \quad \text{mit } \lambda = \frac{u_{1,rms}}{(\partial_1 u_1)_{rms}}. \quad (2.18)$$

Dabei ist  $u_{1,rms} = \langle (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  und  $(\partial_1 u_1)_{rms}$  entsprechend definiert.

Die Wellenvektoren  $\mathbf{k} \in K$  lassen sich durch  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  darstellen,  $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Im Ortsraum entspricht dies einem äquidistantem  $N^3$ -Gitter mit dem Gitterpunktabstand  $2\pi/N$ . In der vorliegenden Arbeit ist entweder  $N = 96$  bei einer kinematischen Viskosität  $\nu = 0.006$  oder  $N = 60$  bei  $\nu = 0.009$ . Alle Moden  $\mathbf{u}(\mathbf{k})$  mit  $|\mathbf{k}| \geq N/2$  werden ständig auf Null gehalten. Damit wird der eindimensionale Aliasing-Effekt unterdrückt, der bei der Berechnung des nichtlinearen Terms  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})_{\mathbf{k}}$  mittels der Fast Fourier Transformation entsteht [5]. Weitergehendes Dealiasing wird nicht durchgeführt.

<sup>1</sup>Aus einer Differentialgleichung  $\frac{d}{dt}U = F(U)$  wird mittels AB2 und einem Zeitschritt  $\delta t$  die Diskretisierung  $U^{n+1} = U^n + \delta t \left( \frac{3}{2} F(U^n) - \frac{1}{2} F(U^{n-1}) \right)$ .

<sup>2</sup>Die semidiskretisierte Gleichung  $\frac{d}{dt}U_{\mathbf{k}} + \nu k^2 U_{\mathbf{k}} - G_{\mathbf{k}}(U_{\mathbf{k}}) = 0$  ist äquivalent zu  $\frac{d}{dt}[\exp(\nu k^2 \delta t) U_{\mathbf{k}}] = \exp(\nu k^2 \delta t) G_{\mathbf{k}}(U_{\mathbf{k}})$ . Daraus ergibt sich mit einer Euler-Zeitdiskretisierung  $U_{\mathbf{k}}^{n+1} = \exp(-\nu k^2 \delta t) [U_{\mathbf{k}}^n + \delta t G_{\mathbf{k}}(U_{\mathbf{k}}^n)]$ .

## 2.4 Überprüfung der Isotropie

In der gesamten Arbeit wird großer Wert auf die Isotropie der numerisch erzeugten Strömung gelegt. Jedoch wird zu Vergleichszwecken an einigen Stellen, die gekennzeichnet sind, eine explizit anisotrope Strömung verwendet.

Die Isotropie der Strömung wird auf verschiedene Arten überprüft:

(i) Zunächst besteht zwischen den Mittelwerten  $\langle u_1^2 \rangle$ ,  $\langle u_2^2 \rangle$  und  $\langle u_3^2 \rangle$  weniger als 5% Abweichung voneinander.

(ii) Im Falle perfekter Isotropie kann die mittlere Energiedissipationsrate  $\epsilon = 1$  aus jeder beliebigen Komponente des Spannungstensors  $\partial_i u_j$  berechnet werden. Es gilt dann

$$\epsilon = \langle \epsilon(\mathbf{x}, t) \rangle = 15\nu \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle = \frac{15}{2} \nu \langle (\partial_2 u_1)^2 \rangle, \quad (2.19)$$

wobei  $\epsilon(\mathbf{x}, t)$  die aus dem kompletten Spannungstensor berechnete lokale Energiedissipationsrate ist:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2. \quad (2.20)$$

Wie man in Tabelle 2.1 sieht, zeigen die Simulationen mit isotroper Energieeinfütterung eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den auf verschiedene Arten berechneten Energiedissipationsraten.

	$\epsilon_{in}$	$\langle \epsilon(\mathbf{x}, t) \rangle$	$15\nu \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle$	$\frac{15}{2} \nu \langle (\partial_2 u_1)^2 \rangle$
I, $N = 96$	1	1.003	0.984	1.021
I, $N = 60$	1	1.003	0.984	0.994
A, $N = 60$	1	1.004	0.931	0.851

Tabelle 2.1: Auf verschiedene Weisen berechnete Energiedissipationsrate für zwei isotrope (I) und eine anisotrope (A) Simulation. Die gute Übereinstimmung zwischen Energieeinfütterung  $\epsilon_{in} = 1$  und  $\langle \epsilon(\mathbf{x}, t) \rangle$  bedeutet statistische Stationarität. Das Maß an Übereinstimmung der letzten beiden Spalten mit 1 charakterisiert den Grad an Isotropie im viskosen Bereich.

(iii) Im isotropen Fall hat der Isotropiekoeffizient [23]

$$I(k_1) = \frac{E_{11}(k_1) - k_1 \partial E_{11}(k_1) / \partial k_1}{2E_{22}(k_1)}, \quad (2.21)$$

der longitudinale und transversale Energiespektren  $E_{11}(k_1)$  und  $E_{22}(k_1)$  miteinander vergleicht, den Wert 1 [24]. In Abbildung 2.1 ist  $I(k_1)$  für eine isotrope (I) und eine anisotrope Simulation (A) dargestellt. Im Fall (I) liegt die Kurve näher bei 1 als für (A). Der Buckel bei  $k_1 = 2.5$  in der isotropen Simulation könnte vom Antrieb der Moden  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  herrühren. Die Oszillationen für große  $k_1$  sind numerische Artefakte, die von der Differenziation in (2.21) stammen.

(iv) Man kann überprüfen, inwieweit Gleichung (2.5), die in einer homogenen und isotropen Strömung  $D_2^L$  mit  $D_2^T$  verbindet, für die numerischen Daten erfüllt ist. Wie

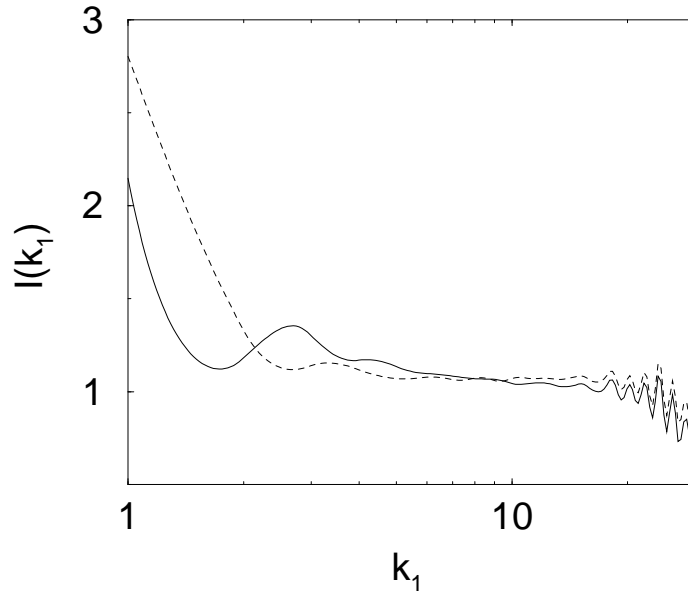


Abbildung 2.1: Isotropiekoeffizient  $I(k_1)$  aus Gleichung (2.21) für die Simulationen I (durchgezogen) und A (gestrichelt) auf einem  $60^3$ -Gitter.

man in Abbildung 2.2 sieht, gibt es auf großen Skalen nur wenig Übereinstimmung zwischen  $D_2^T(r)$  und der mittels Gleichung (2.5) aus  $D_2^L(r)$  berechneten Kurve. Der Grund dafür ist, dass bei  $r \approx L$  immer noch eine beträchtliche Korrelation  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$  vorherrscht. Beim größtmöglichen sinnvollen Abstand  $r_{max}$ , den es bei der Anwendung von periodischen Randbedingungen gibt, nämlich wenn  $r$  gleich der Hälfte des Periodizitätsvolumen ist (hier  $r_{max} = \pi \approx 146\eta$ ), findet man für die isotrope Simulation mit  $N = 96$  folgende Werte:

$$\frac{\langle u_j(\mathbf{x} + \mathbf{e}_r^L r_{max}) u_j(\mathbf{x}) \rangle}{\langle u_j^2(\mathbf{x}) \rangle} \approx 0.25, \text{ und}$$

$$\frac{\langle u_j(\mathbf{x} + \mathbf{e}_r^T r_{max}) u_j(\mathbf{x}) \rangle}{\langle u_j^2(\mathbf{x}) \rangle} \approx -0.15, \text{ für } j = 1, 2, 3.$$

Deswegen ist  $D_2^L(r_{max})$  kleiner und  $D_2^T(r_{max})$  größer als der Wert  $2\langle u_j^2 \rangle$ , der sich für beide Strukturfunktionen ergibt, wenn völlige Dekorrelation zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} + \mathbf{r}_{max}$  vorherrscht. Obige Korrelationen bedeuten geometrisch, dass im numerischen Strömungsfeld ein Wirbel mit dem Durchmesser  $r \approx r_{max}$  vorhanden ist. Er ist eine Folge der periodischen Randbedingungen und bedeutet, dass die Strömung auf großen Skalen nicht isotrop und homogen ist. Die Simulation (A), die eine explizit anisotrope Energieeinfütterung benutzt, zeigt auf allen Skalen Anisotropie. Dies ist kompatibel mit den Ergebnissen aus Tabelle 2.1.

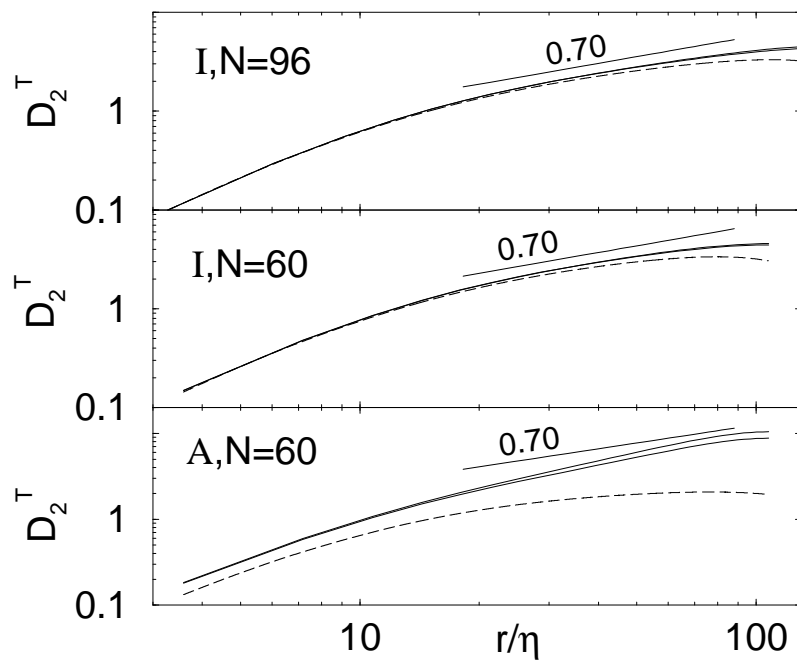


Abbildung 2.2:  $D_2^T(r)$  für die isotrope Simulation mit  $N = 96$  oben, in der Mitte  $N = 60$  und isotrop, und unten  $N = 60$  anisotrop. Die durchgezogenen Linien stammen aus der direkten Simulation, die gestrichelte Linie aus der Anwendung von Gleichung (2.5). Im unteren Bild sieht man auf allen Skalen die Anisotropie.



---

## 3 Das Auswerteverfahren Extended Self Similarity (ESS)

---

### 3.1 Einführung

Die ESS-Methode hat sich bislang als sehr hilfreich erwiesen bei der Bestimmung von Skalenexponenten in experimentellen und numerischen turbulenten Strömungen [32–34]. Dabei trägt man die longitudinale Strukturfunktion (2.1) der Ordnung  $p$  gegen die longitudinale Strukturfunktion der Ordnung 3 auf. Die ursprüngliche Motivation für die Wahl der dritten Strukturfunktion ist die Howard-von-Karman-Kolmogoroff-Strukturgleichung (2.6) [1, 2, 36], die besagt, dass  $D_3^L(r)$  sich im Inertialbereich wie  $D_3^L \propto r$  verhält und deshalb

$$D_p^L(r) \propto r^{\zeta_p^L} \propto [D_3^L(r)]^{\zeta_p^L} \quad (3.1)$$

den gleichen Skalenexponenten sowohl als Funktion von  $r$  als auch von  $D_3^L$  hat. Gewöhnlich benutzt man aber für die Auftragung nicht  $D_3^L(r)$ , sondern die entsprechende Funktion

$$D_p^{*L}(r) = \langle |[\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{e}_r^L|^p \rangle, \quad (3.2)$$

die mit Betragsstrichen definiert ist, weil die statistische Konvergenz für  $D_3^{*L}(r)$  einfacher herzustellen ist als für  $D_3^L(r)$ . Dabei nimmt man an [32, 34], dass  $D_3^{*L}(r)$  ebenfalls ein lineares Skalenverhalten im Inertialbereich zeigt [37]. Daraus ergeben sich die Exponenten  $\xi_p^L$ , die folgendermaßen definiert sind

$$D_p^L(r) \propto [D_3^{*L}(r)]^{\xi_p^L}, \quad (3.3)$$

und im allgemeinen von den  $\zeta_p^L$  unterschieden werden müssen [40]. Für die  $\xi_p^L$  zeigt sich eine beachtliche Universalität, was die Unabhängigkeit von der Strömungsgeometrie und der Reynoldszahl angeht [41, 42]. Der Grad an Intermittenz kann auch durch die Auftragung von  $D_p^L(r)$  gegen eine beliebige Funktion  $D_q^L(r)$  quantifiziert werden. Dabei ist für ungerade Momente der Betrag zu nehmen, d.h.  $D_q^{*L}(r)$ .

Es wird nun das Finite- $Re_\lambda$ -Verhalten der ESS-Auftragung  $D_2^L/(-D_3^L)^{2/3}$  über  $-D_3^L$  mit Hilfe der Batchelor-Parametrisierung der Strukturfunktion  $D_2^L(r)$  untersucht. Außerdem wird die Wichtigkeit der Verwendung von  $D_3^{*L}$  anstelle von  $D_3^L$  in ESS-Darstellungen demonstriert.

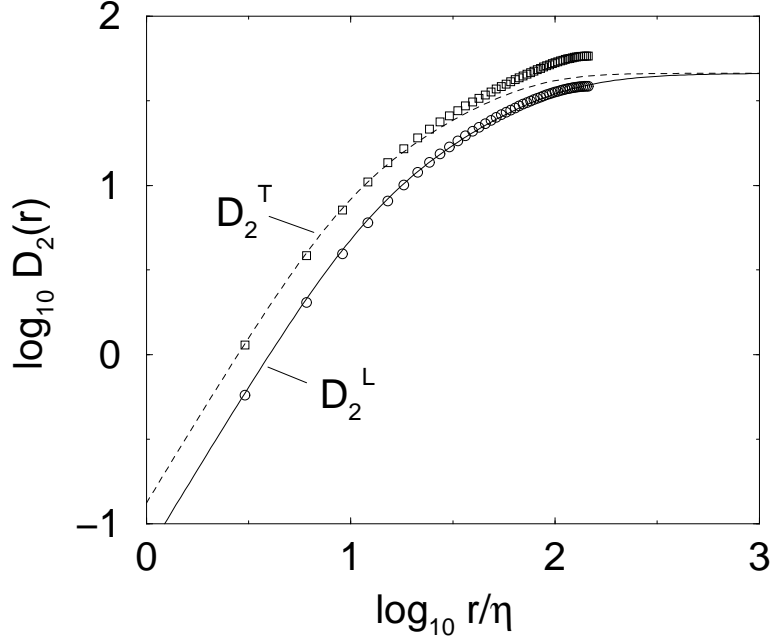


Abbildung 3.1: Batchelor-Parametrisierung (3.4) (durchgezogene Linie) für die longitudinale Strukturfunktion zweiter Ordnung  $D_2^L(r)$  aus der Simulation mit  $N = 96$  und  $Re_\lambda = 110$  (Numerische Daten: Kreise). Dabei ist  $a = 12.4\eta$  und  $L = 108\eta$ . Mittels Gleichung (2.5) berechnet man daraus  $D_2^T(r)$  (gestrichelte Linie). Übereinstimmung mit den Datenpunkten (Quadrate) jenseits des viskosen Bereiches ist nicht vorhanden.

### 3.2 Batchelor-Parametrisierung der Strukturfunktionen

Im folgenden wird die zweite longitudinale Strukturfunktion  $D_2^L(r)$  mit einer Interpolationsformel vom Batchelor-Typ [38, 39, 43–46]

$$D_2^L(r) = \frac{\epsilon}{15\nu} \frac{r^2}{[1 + (r/a)^2]^{1-\zeta_2/2}} \frac{1}{[1 + (r/L)^2]^{\zeta_2/2}} \quad (3.4)$$

gefittet, wobei hier ein Term zur Sättigung bei großen Skalen hinzugefügt wurde [45, 47]. Dabei ist  $\zeta_2$  der Skalenexponent im Inertialbereich. Er ergibt sich aus eigenen ESS-Auswertungen [21] und anderen Arbeiten [2, 32–34, 48] zu  $\zeta_2 = 0.70$ . Die freien Fitparameter sind die Übergangsskala  $L$  für den Übergang vom Inertialbereich in den Energieeinfütterungsbereich sowie die Übergangsskala  $a$  für den Übergang vom viskosen Bereich in den Inertialbereich. Aus den numerischen Daten in Abbildung 3.1 erhält man die Werte  $a = 12.4\eta$  und  $L = 108\eta$ .

Nicht alle Strömungen müssen ein Sättigungsverhalten für große  $r$  vom Typ (3.4) aufweisen. Jedoch zeigen Auswertungen von numerischen und experimentellen Daten [45, 47] eine gute Übereinstimmung mit (3.4). Diese Gleichung garantiert ein analytisches Verhalten des Korrekturterms zu  $r^2$  bei kleinen Skalen und auch des Korrekturterms zu  $r^0$  bei großen Skalen.

Für sehr große  $Re$  entwickelt Gleichung (3.4) ein Skalenverhalten im Inertialbereich:

$$D_2^L(r) = b^L (\epsilon r)^{2/3} \left( \frac{r}{L} \right)^{\delta\zeta_2}. \quad (3.5)$$

Dabei ist  $\delta\zeta_2 = \zeta_2 - 2/3$  die Skalenkorrektur zum klassischen Skalen und  $b^L$  die sogenannte Kolmogoroff-Konstante. Vom Fit der numerischen Daten in Abbildung 3.1 erhält man  $b^L = \epsilon^{1/3} L^{\delta\zeta_2} a^{2-\zeta_2} / (15\nu) = 2.05$ . Dieses Ergebnis stimmt gut mit den in der Literatur gebräuchlichen Werten  $b^L$  von 1.6 bis 2.5 [1, 2, 36, 44, 49] überein. Sreenivasan [49] erhält z.B.  $b^L = 2.0 \pm 0.4$ . Die Strukturfunktion  $D_2^M(r)$  verhält sich ebenfalls im asymptotischen Fall nach einem Gesetz vom Typ (3.5). Allerdings ist der Vorfaktor dann  $b \approx 11b^L/3$  und liegt zwischen 6 und 9. Man kann alternativ auch  $D_2^M(r)$  mit einer Batchelor-Parametrisierung fitten [44, 45], wobei die Qualität des Fits ähnlich ist [45].

Es wird nun die Batchelor-Parametrisierung (3.4) angewendet, um  $D_2^L(r)$  auf sehr große Reynoldszahlen hochzuskalieren, wobei  $b^L = 2.0$  und  $\zeta = 0.70$  festgehalten werden. Daraus ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (2.5) und (2.6) die transversale Strukturfunktion zweiter Ordnung  $D_2^T(r)$  und die longitudinale Strukturfunktion dritter Ordnung  $D_3^L(r)$ . Damit wird eine ESS-Analyse der Strukturfunktionen zweiter Ordnung für beliebig hohe Reynoldszahlen möglich.

Um  $D_2^L(r)$  in Gleichung (3.4) auf sehr große  $Re$  hochskalieren zu können, muss die Abhängigkeit der Parameter  $a$  und  $L$  von der Reynoldszahl bekannt sein. Legt man Sreenivasans Beobachtungen zugrunde, dass weder die asymptotische, dimensionslose Energiedissipationsrate  $c_\epsilon = \epsilon L / u_{1,rms}^3$  [50–53] noch die Kolmogoroff-Konstante  $b^L$  [49] (siehe dazu auch [54]) von der Reynoldszahl abhängen, so ergibt sich eine schwache  $Re$ -Abhängigkeit des Übergangs vom viskosen Bereich zum Inertialbereich [52, 53]. Aus den Gleichungen (3.4), (3.5) und  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$  erhält man:

$$\frac{a}{\eta} = (15b^L)^{3/(4-3\delta\zeta_2)} \left( \frac{\eta}{L} \right)^{3\delta\zeta_2/(4-3\delta\zeta_2)}. \quad (3.6)$$

Aus  $b^L$ ,  $\zeta_2$  und  $Re$  kann man  $L$  und  $Re_\lambda$  berechnen [51–53]. Mit den Beziehungen  $D_2^L(r \rightarrow \infty) = b^L (\epsilon L)^{2/3} = 2u_{1,rms}^2$  und  $Re = u_{1,rms} L / \nu$  ergibt sich

$$\frac{L}{\eta} = \left( \frac{2}{b^L} \right)^{3/8} Re^{3/4}. \quad (3.7)$$

Über  $Re_\lambda = u_{1,rms}^2 / (\nu (\partial_1 u_1)_{rms})$  und  $\epsilon = 15\nu \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle$  erhält man

$$Re_\lambda = \frac{\sqrt{15} u_{1,rms}^2}{\sqrt{\nu \epsilon}} = \sqrt{15} \left( \frac{b^L}{2} \right)^{3/4} \sqrt{Re}. \quad (3.8)$$

Umgekehrt kann man natürlich auch aus  $a$  und  $L$  die Größen  $Re$  und  $Re_\lambda$  berechnen. Für die oben genannten numerischen Werte ergibt sich  $Re = 520$  und  $Re_\lambda = 90$ . Dies ist in befriedigender Übereinstimmung mit dem direkten numerischen Ergebnis  $Re_\lambda = 110$ . Der Grund für die kleine Unterschätzung ist, dass im numerischen

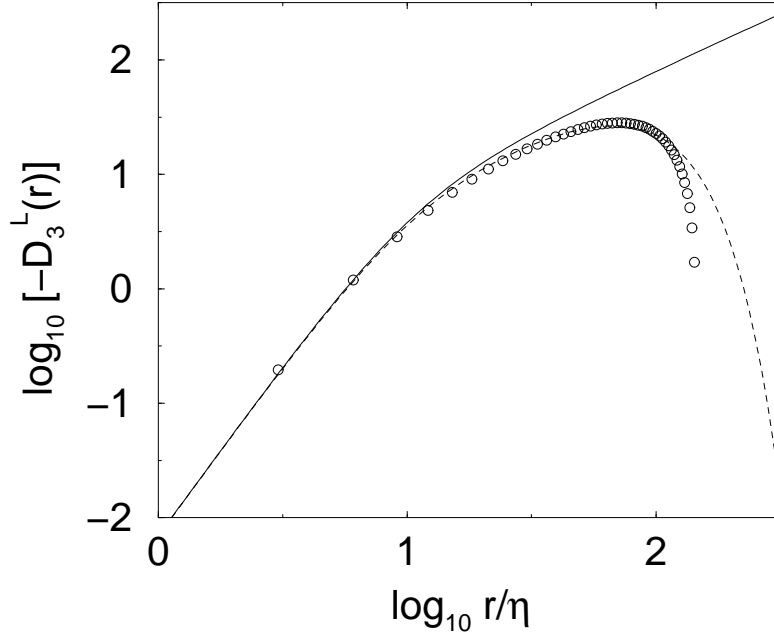


Abbildung 3.2: Die longitudinale Strukturfunktion dritter Ordnung aus der numerischen Simulation (Kreise) wird verglichen mit derjenigen, die aus der Batchelor-Parametrisierung von  $D_2^L(r)$  stammt (durchgezogene Linie). Die gestrichelte Kurve wurde nach Gleichung (3.9) berechnet und enthält einen Term, der  $D_3^L(r)$  für große  $r$  auf 0 abfallen lässt. Die Taylor-Reynoldszahl ist  $Re_\lambda = 110$ .

Strömungsfeld, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, noch Korrelationen auf den größten Längenskalen übrigbleiben.

Mit der Kolmogoroff-Strukturgleichung (2.6) kann man nun  $D_3^L(r)$  aus  $D_2^L(r)$  berechnen. Wie man in Abbildung 3.2 sieht, ist die Übereinstimmung von  $D_3^L(r)$  aus der Batchelor-Parametrisierung mit den numerischen Daten außerhalb des viskosen Bereichs gering. Die numerische Strukturfunktion  $D_3^L(r)$  fällt auf 0 für große  $r$ , weil die Geschwindigkeitsdifferenzen auf großen Skalen eine Gaußverteilung aufweisen und daher alle ungeraden Momente bei großen  $r \approx L$  verschwinden. Dieses nicht durch Gleichung (2.6) beschriebene Verhalten entsteht aus Randeffekten. Es gibt nämlich keine größeren Wirbel als auf der Skala  $r_{max}$ , die Korrelationen erzeugen können. Man kann dieses Problem durch Hinzufügen eines entsprechenden Terms in (2.6) lösen [56]. Hier wird die folgende Form für  $D_3^L(r)$  gewählt:

$$D_3^L(r) = \left( -\frac{4}{5}\epsilon r + 6\nu \frac{d}{dr} D_2^L(r) \right) \frac{L}{r} (1 - e^{-r/L}) e^{-r^2/L^2}. \quad (3.9)$$

Damit wird die Übereinstimmung mit dem aus der Simulation bestimmten  $D_3^L(r)$  in Abbildung 3.2 deutlich verbessert.

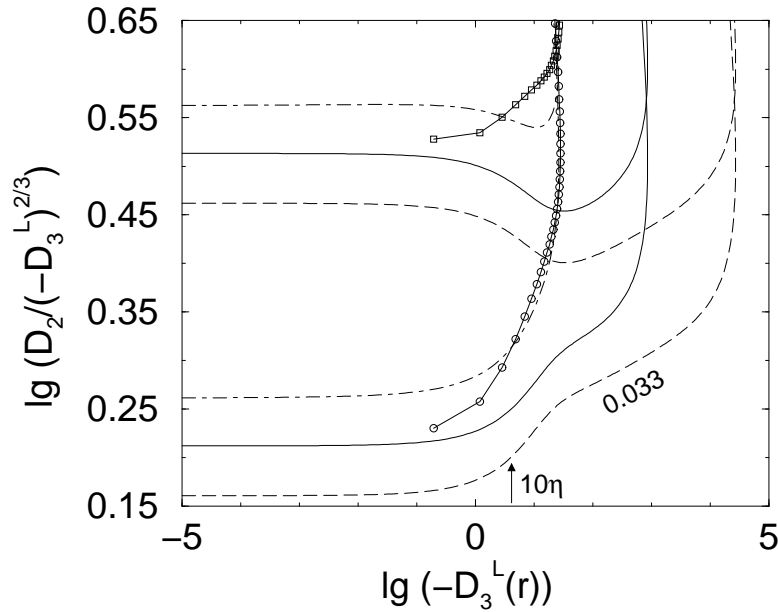


Abbildung 3.3: Kompensierte ESS-Darstellungen von  $D_2/(-D_3^L)^{2/3}$  über  $-D_3^L$  für die Strukturfunktionen aus der Simulation bei  $Re = 5.2 \cdot 10^2$  (Kreise: longitudinal, Quadrate: transversal) sowie aus der Batchelor-Parametrisierung (3.4) von  $D_2^L(r)$ , wobei  $D_3^L(r)$  aus Gleichung (3.9) stammt. Die Reynoldszahlen dafür sind  $Re = 5.2 \cdot 10^2$ ,  $Re = 5.2 \cdot 10^4$  und  $Re = 5.2 \cdot 10^6$  und entsprechen Taylor-Reynoldszahlen von  $Re_\lambda = 90$  (Strichpunkte),  $Re_\lambda = 900$  (durchgezogen) und  $Re_\lambda = 9000$  (gestrichelt).  $\zeta = 0.70$  und  $b^L = 2.0$ . Die drei unteren Kurven sind für die longitudinalen Strukturfunktionen und die drei oberen für die transversalen.

### 3.3 Die Anwendung von ESS

Man trägt die im vorigen Abschnitt aus der Batchelor-Parametrisierung erhaltenen Strukturfunktionen zweiter und dritter Ordnung für verschiedene Reynoldszahlen in Form einer kompensierten ESS-Darstellung auf, d.h.  $D_2^{L,T}/(-D_3^L)^{2/3}$  über  $-D_3^L$ . Wie man in Abbildung 3.3 sieht, ergeben sich drei Bereiche: Der viskose Bereich ohne jegliche Skalenkorrekturen (horizontale Linie), ein Übergangsbereich, der dem Längenbereich von  $r \approx 1\eta$  bis  $r \approx 10\eta$  entspricht, und dann für große Skalen und große  $Re_\lambda \geq 500$  der Inertialbereich mit der Skalenkorrektur  $\delta\zeta_2 = 0.033$ .

Die Verwendung von  $D_3^L$  für ESS-Auftragungen benötigt so große Reynoldszahlen, um Skalenexponenten im Inertialbereich ablesen zu können, dass volle numerische Simulationen sie nicht erreichen können. In Abbildung 3.3 sind ebenfalls die numerischen Daten für  $Re_\lambda = 110$  aufgetragen. Sie ermöglichen keinerlei Aussage über Skalengesetze. Verwendet man für die Auftragung jedoch  $D_3^*$  wie in Abbildung 3.4, so können sehr wohl Skalenexponenten bestimmt werden. Der Grund dafür ist, dass  $D_2^L$  und  $D_3^{*L}$  die gleiche Art der Sättigung für große Skalen aufweisen. Sie werden nämlich konstant, während  $D_3^L$  auf Null fällt, wie im vorigen Abschnitt diskutiert wurde.

Anhand der Abbildungen 3.3 und 3.4 kann man sehen, dass die Erweiterung des Ska-

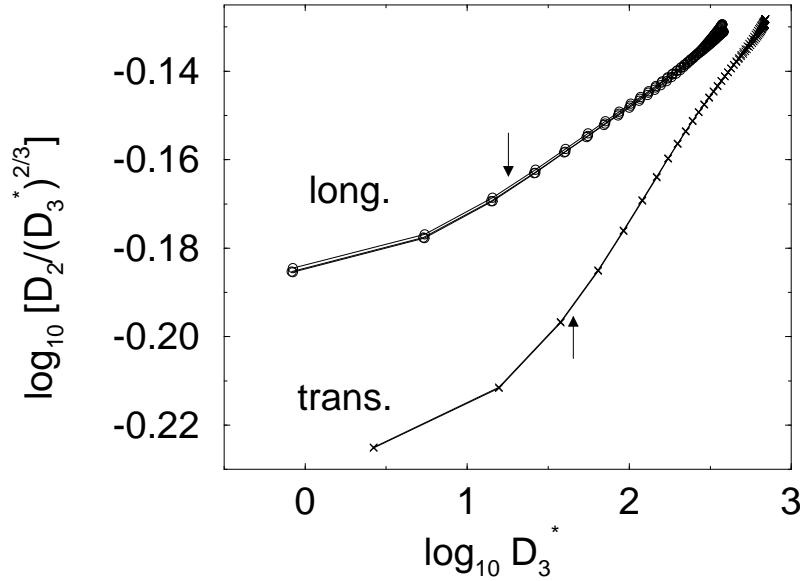


Abbildung 3.4: Kompensierte ESS-Darstellungen von  $D_2^L / (D_3^{*L})^{2/3}$  über  $D_3^{*L}$  (drei unterschiedliche Datensätze für die drei Raumrichtungen, die sehr gut übereinstimmen) und  $D_2^T / (D_3^{*T})^{2/3}$  über  $D_3^{*T}$  (zwei Datensätze, die ebenfalls übereinstimmen) für die numerische Turbulenz,  $Re_\lambda = 110$ . Die Pfeile deuten  $10\eta$  an. Die Datenpunkte sind für  $r = 3\eta, r = 6\eta, r = 9\eta, \dots$ , von links nach rechts.

lenbereiches aufgrund von ESS zum größten Teil zu den großen Skalen hin geschieht. Dies gilt auch dann noch, wenn  $Re_\lambda$  so klein ist, dass es noch keinen Inertialbereich gibt. Das Einsetzen von ESS bei kleinen Skalen geschieht bei etwa  $r \approx 10\eta$  und entspricht grob der Übergangsskala  $a \approx 12.4\eta$ , die man durch Fitten von  $D_2^L(r)$  mit der Batchelor-Formel (3.4) findet. Briscolini et al. [34] erhalten in numerischen Rechnungen eine ESS-Skalenerweiterung herunter bis zu  $r \approx 7\eta$ , was grob den hier gefundenen  $10\eta$  entspricht, aber leicht kleiner ist. Benzi mutmaßte [35], dass der Ursprung dieses kleinen Unterschieds in der numerischen Auflösung der kleinen Skalen liegen könnte. In der Rechnung von Briscolini ist die Gitterauflösung etwa  $1\eta$ , wohingegen in dieser Arbeit die kleinste Auflösung etwa  $3\eta$  beträgt. Die dadurch bedingten Abweichungen in den Strukturfunktionen auf den viskosen Skalen könnten das ESS-Skalenverhalten im Übergangsbereich beeinflussen.

### 3.4 Kompensierte ESS-Darstellungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Anwendung von kompensierten ESS-Auftragungen zur Visualisierung von Intermittenzeffekten sinnvoll ist. Schon Meneveau [46] stellt heraus, wie irreführend eine ESS-Auftragung  $D_p^L$  gegen  $D_3^{*L}$  sein kann. In Abbildung 3.5(a) wird der Effekt demonstriert. Die originale ESS-Auftragung  $D_2^L$  über  $D_3^{*L}$  gibt ein besseres Skalenverhalten als in Abbildung 3.4 nur vor. Der Grund dafür ist, dass der Skalenexponent im viskosen Bereich  $2/3$  sein muss, da eine Taylorentwicklung der Strukturfunktionen für kleine  $r$  das Verhalten  $D_p(r) \propto r^p$  bzw.

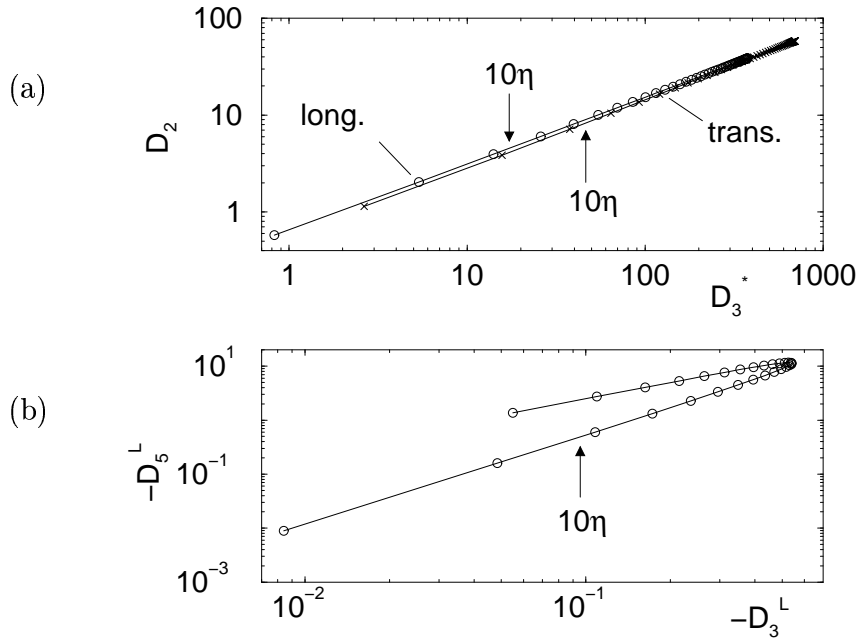


Abbildung 3.5: (a) ESS-Auftragungen  $D_2(r)$  über  $D_3^*$  für longitudinale und transversale Strukturfunktionen,  $Re_\lambda = 110$ . Die Daten sind mit der vorigen Abbildung identisch, wo kompensierte ESS-Darstellungen zu sehen sind, in denen das unterschiedliche Verhalten im viskosen Bereich und Inertialbereich klar zu erkennen ist. (b) ESS-Auftragung von  $-D_5^L(r)$  über  $-D_3^L(r)$ . In dieser Abbildung ist die Taylor-Reynoldszahl nur 70.

$D_3^* \propto r^3$  liefert. Der Wert  $2/3$  ist durch Augenschein kaum von  $2/3 + \delta\zeta_2 \approx 0.70$  im Inertialbereich zu unterscheiden. Um diesen kleinen Unterschied von VSR- und ISR-Exponent besser zu verdeutlichen, empfiehlt sich die Anwendung von kompensierten ESS-Darstellungen [21, 57].

Wenn man lokale Steigungen [40] wie in Abbildung 3.6(a) aufträgt, dann macht es natürlich keinen Unterschied, ob man sie aus den kompensierten oder den ursprünglichen ESS-Auftragungen berechnet. Das ESS-Skalenverhalten mit  $\xi_2^L \approx 0.69$  bzw.  $\xi_2^T \approx 0.72$  beginnt bei etwa  $10\eta$ . Man sieht in Abbildung 3.6(b), dass ohne ESS keinerlei Skalenaussagen für die vorliegende Simulation bei kleiner Reynoldszahl möglich sind. ESS ist schon aus dem einfachen Grund sinnvoll, dass der Übergang von einer lokalen Steigung  $2/3$  auf ungefähr  $0.70$  kürzer ist als der von einer lokalen Steigung  $2$  auf  $0.70$ .

Es stellt sich die Frage nach dem Sinn von ESS-Auftragungen für Strukturfunktionen mit ungerader Ordnung (berechnet ohne Absolutbetrag). In Abbildung 3.5(b) wurde kein ESS hin zu großen Skalen festgestellt. Es scheint so zu sein, dass gerade und ungerade Momente verschiedenen Arten von Statistik gehorchen. Dies hängt vielleicht mit dem Ergebnis von Herweijer und van de Water [58] zusammen, dass die  $\zeta_p$  mit ungeradem  $p$  (berechnet aus  $D_p^L(r) \propto r^{\zeta_p}$ ) kleiner sind als die aus den benachbarten  $\zeta_{p\pm 1}$  extrapolierten Werte (für die die  $p \pm 1$  gerade sind). Auch von

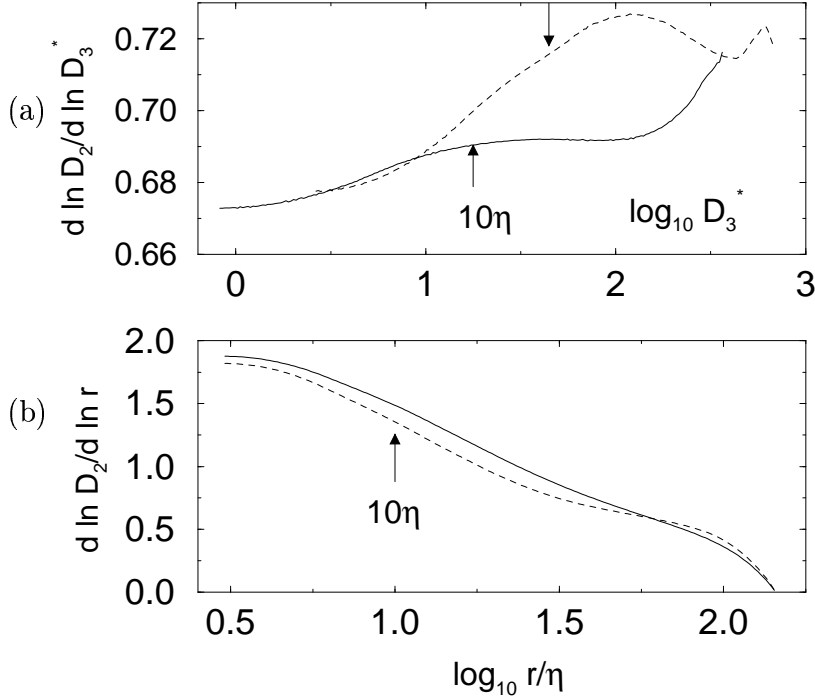


Abbildung 3.6: (a) Lokale Steigungen  $d \log_{10} D_2^L / d \log_{10} D_3^{*L}$  (durchgezogen) und  $d \log_{10} D_2^T / d \log_{10} D_3^{*T}$  (gestrichelt) aus den Kurven von 3.5(a). Die Pfeile deuten  $10\eta$  an. (b) Lokale Steigungen  $d \log_{10} D_2^L / d \log_{10} r$  (durchgezogen) und  $d \log_{10} D_2^T / d \log_{10} r$  (gestrichelt) aus den Kurven von Abbildung 3.1.

Stolovitzky et al. sowie Sirovich et al. [38–40] wurde ein Unterschied zwischen den  $\zeta_p$  für gerade und ungerade  $p$  gefunden. Jedoch waren dort die  $\zeta_p$  für ungerade  $p$  größer als von der Extrapolation her erwartet.

Es ist noch unklar, warum sich nichtuniverselle Effekte der Energieeinfütterung und großskalige Randeffekte in Strukturfunktionen gerader Ordnung in etwa wegheben, nicht aber in ungeraden Momenten, die ohne Absolutbetrag berechnet wurden. Vielleicht kann man mit besonders ausgefeilter Technik auch nichtuniverselle Eigenschaften von ESS-Auftragungen gerader Strukturfunktionen bestimmen.

### 3.5 Longitudinale und transversale Strukturfunktionen

In diesem Abschnitt wird demonstriert, wie leicht Finite- $Re_\lambda$ -Effekte ein falsches, nicht vorhandenes Skalenverhalten vortäuschen können. Das geschieht am Beispiel der longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen.

Man könnte meinen, der beste Weg, um mögliche Unterschiede im Skalenverhalten von  $D_p^L(r)$  und  $D_p^T(r)$  zu entdecken, ist die Auftragung des Verhältnisses  $D_p^T / D_p^L$  über  $r$  (oder  $D_3^L$ ). Gemäß Gleichung (2.5) sollten  $D_2^T(r)$  und  $D_2^L(r)$  im Inertialbereich gleiches Skalenverhalten zeigen, d.h. das Verhältnis müsste konstant sein. Betrachtet man jedoch Abbildung 3.7(a), so scheint es unterschiedliches Skalenverhalten von  $D_2^T(r)$  und  $D_2^L(r)$  zu geben.

Der Grund für diese augenscheinliche Diskrepanz ist, dass das Argument des gleichen Skalenverhaltens von  $D_2^T(r)$  und  $D_2^L(r)$  nur dann gilt, wenn beide Strukturfunktionen eigenständig skalieren. Das ist aber nicht der Fall in den Übergangsbereichen oder wenn noch kein Inertialbereich existiert. In dieser Simulation ist die Reynoldszahl bei weitem zu klein für die Entwicklung eines Inertialbereiches. Die Auftragung wird in Abbildung 3.7(b) innerhalb der Batchelor-Parametrisierung wiederholt, die beliebig hohe  $Re_\lambda$  erlaubt. Nur wenn  $Re_\lambda \geq 500$  ist, dann entwickelt sich ein Plateau, welches den Einsatz des asymptotisch korrekten ISR-Verhaltens zeigt. Um wirklich verlässliche Skalenexponenten von diesem Plateau ablesen zu können, bräuchte man mindestens ein  $Re_\lambda \approx 1000$  und mehr. Für  $Re_\lambda \approx 100$  zeigt sich ein falsches Skalengesetz mit dem Exponenten  $-0.14$ , welches nichts mit dem ISR-Skalenverhalten zu tun hat.

Betrachtet man die Gleichungen (3.4) und (2.5), dann kann man dieses Verhalten verstehen. Im viskosen Bereich muss wegen (2.5) und  $D_2^L \propto r^2$  der Quotient  $D_2^T/D_2^L = 2$  sein und im Inertialbereich gilt wegen (2.5) und grob  $D_2^L \propto r^{2/3}$  der Zusammenhang  $D_2^T/D_2^L \approx 4/3$ . Der Übergangsbereich zwischen diesen beiden Bereichen ist ungefähr eine Dekade groß. Dasselbe kann man in Abbildung 3.3 sehen, wo neben  $D_2^L/(D_3^L)^{2/3}$  ebenfalls  $D_2^T/(D_3^L)^{2/3}$  gegen  $D_3^L$  aufgetragen ist. Im Übergangsbereich biegt sich erstere hoch und letztere nach unten. Nur für  $Re_\lambda \geq 500$  werden die asymptotischen Exponenten  $\delta\zeta_2^L = \delta\zeta_2^T = 0.033$  sichtbar.

Dieselben endlichen  $Re_\lambda$ -Effekte, die hier für die Strukturfunktionen zweiter Ordnung diskutiert wurden – hier ist bekannt, dass  $D_2^L$  und  $D_2^T$  das gleiche Skalenverhalten aufweisen – werden in Strukturfunktionen höherer Ordnung, solange  $Re_\lambda \leq 500$  ist, die Bestimmung von Skalenexponenten vs.  $r$  (oder vs.  $D_3^L$ ) erschweren.

In diesem Kapitel wurde deutlich, dass die Auswertemethode ESS zur Bestimmung von Skalenexponenten im Inertialbereich nur dann sinnvoll anwendbar ist, wenn die Strukturfunktionen gegenüber  $D_3^*$  aufgetragen werden. Bei Verwendung von  $D_3^L(r)$  stellt sich erst bei so großen  $Re_\lambda$  ein Inertialbereich ein, dass diese  $Re_\lambda$  von Computersimulationen überhaupt nicht erreicht werden können. Trägt man Strukturfunktionen ungerader Ordnung gegeneinander auf, die ohne Absolutbetrag berechnet wurden, so erhält man für die vorliegenden Daten keine Erweiterung des Skalenbereiches hin zu großen Skalen.

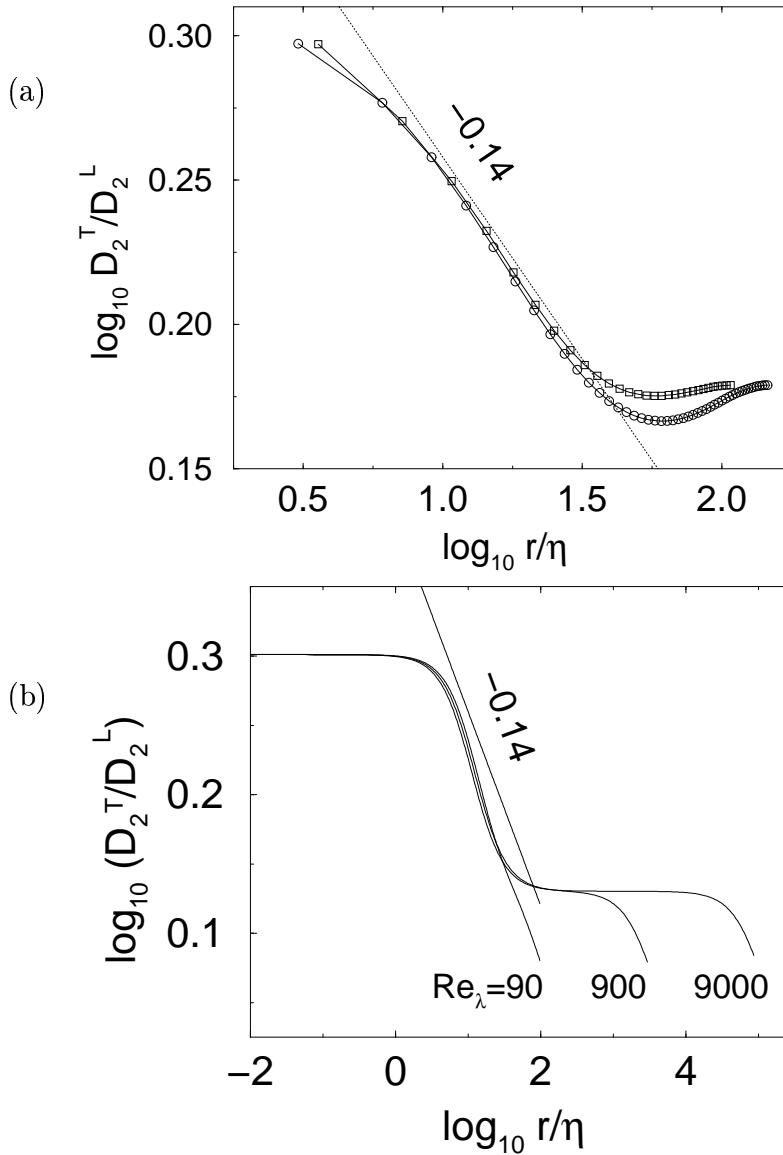


Abbildung 3.7: (a) Das Verhältnis  $D_2^T(r)/D_2^L(r)$  für die numerischen Daten:  $Re_\lambda = 110$  (Kreise) und  $Re_\lambda = 70$  (Quadrate). Man könnte hier fälschlicherweise ein unterschiedliches Skalenverhalten von  $D_2^L(r)$  und  $D_2^T(r)$  ablesen, weil das Verhältnis von  $r$  abhängt. Die scheinbare Steigung von  $-0.14$  ist eingezeichnet. (b)  $D_2^T(r)/D_2^L(r)$  als Funktion von  $r$  für die Batchelor-Parametrisierung (3.4) und die Taylor-Reynoldszahlen  $Re_\lambda = 90$ ,  $Re_\lambda = 900$  und  $Re_\lambda = 9000$ . Das Plateau im ISR (bei etwa  $\log_{10}(4/3) = 0.125$ ), welches man für eine homogene, isotrope Strömung erwartet, beginnt sich erst ab einem  $Re_\lambda \approx 500$  zu entwickeln. Das VSR-Plateau ist bei  $\log_{10} 2 = 0.30$ . Der  $r$ -abhängige Zwischenbereich beschreibt den Übergang zwischen VSR und ISR. Die Steigung bezieht sich auf Breite und unterschiedliche Höhen der beiden Plateaus. Übrigens erkennt man in dieser Darstellung auch die  $Re_\lambda$ -Abhängigkeit der VSR-ISR-Übergangsskala  $a$ , siehe Gleichung (3.6): Der Übergangsbereich wird bei steigendem  $Re_\lambda$  in Richtung kleinerer  $r$  verschoben.

---

## 4 Der Übergang von der vollen zur modenreduzierten Simulation (REWA)

---

### 4.1 Implementation der Modenausdünnung

In diesem Kapitel wird für die REWA-Methode bei  $Re_\lambda \approx 100$  systematisch untersucht, wie sich die Skaleneigenschaften ändern, wenn man den Grad der Wellenvektorausdünnung variiert. Es wird der Übergang von einer vollen numerischen Simulation zur deren REWA-Approximation durchgeführt.

Das REWA-Verfahren (*reduced wave-vector set approximation*) [10–14] wurde ursprünglich als rein spektrale Methode entwickelt, um mit vertretbarem Rechenaufwand Turbulenz bei hohen Reynoldszahlen untersuchen zu können. Die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung lautet in spektraler Form:

$$\dot{u}_i(\mathbf{k}, t) = -iM_{ijl}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}} u_j(\mathbf{q}_1, t)u_l(\mathbf{q}_2, t) - \nu k^2 u_i(\mathbf{k}, t) + f_i(\mathbf{k}, t), \quad (4.1)$$

wobei  $M_{ijl}(\mathbf{k}) = [k_j P_{il}^\perp(\mathbf{k}) + k_l P_{ij}^\perp(\mathbf{k})]/2$  ist und  $P_{ij}^\perp(\mathbf{k})$  den Orthogonalprojektor  $\delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  bezeichnet. Man beschränkt sich bei REWA auf eine numerisch handhabbare Menge  $K$  von Wellenvektoren. Nur die Moden  $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$  mit  $\mathbf{k} \in K$  werden berücksichtigt, und im nichtlinearen Term von Gl. (4.1) gilt zusätzlich zur Bedingung  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}$  noch  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in K$ . Das Geschwindigkeitsfeld im Ortsraum wird mittels  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in K} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  approximiert. Die Menge  $K$  der Wellenvektoren ist  $K = \{2^l \mathbf{k}, \mathbf{k} \in \tilde{K}, l = 0, 1, 2, \dots, l_{max}\}$ . Man wählt  $\tilde{K}$  so aus, daß möglichst viele triadische Navier-Stokes-Wechselwirkungen  $\mathbf{k} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$  mit  $\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \tilde{K}$  vorhanden sind.

Die obere Grenze für die Anwendbarkeit von REWA liegt bei  $O(10^4)$  Freiheitsgraden. Danach ist der Rechenaufwand für die Summe  $\sum_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}}$  kaum noch aufzubringen. Deswegen wird hier der nichtlineare Term in der pseudospektralen Definition  $\mathbf{P}(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{w}(\mathbf{x}))_{\mathbf{k}}$  gemäß Gleichung (2.13) benutzt, so dass eine beliebige Ausdünnung der Wellenvektoren bis hin zur vollen Auflösung möglich ist. Zur technischen Realisierung wird der Programmcode für die volle Simulation aus Kapitel 2 verwendet und zu Beginn eines jeden Zeitschritts werden alle  $\mathbf{u}(\mathbf{k})$  mit  $\mathbf{k} \notin K$  auf Null gesetzt. Die prinzipiellen Rechenzeit- und Rechenspeicheranforderungen einer vollen Simulation lassen nur relativ kleine  $Re_\lambda$  zu, obwohl die REWA-Methode für den Limes großer  $Re_\lambda$  entwickelt wurde. Es gibt dementsprechend nur einen kurzen Inertialbereich. Allerdings erlaubt die Auswertemethode ESS trotzdem die Bestimmung von Skalenexponenten.

Im folgenden werden zwei unterschiedliche Methoden für die Wellenvektorreduktion betrachtet:

(i) Man verwendet geometrisch skalende Modensätze mit einer Grundmenge  $\tilde{K} = \{\mathbf{k}, |\mathbf{k}| \leq k_B\}$ . Der Parameter  $k_B$  mit  $1 < k_B \leq N/2$  charakterisiert den Grad der Wellenvektorreduktion. Die Wahl  $k_B = k_{max} = N/2$  entspricht einer vollen Simulation,  $k_B \sim 2$  den früher durchgeführten REWA-Simulationen [10–14]. Führt man die Modenzahldichte  $N(k)$  ein als die Anzahl Moden auf einer Schale im  $\mathbf{k}$ -Raum mit dem Radius  $k$  und der Dicke  $\delta k$ , geteilt durch  $\delta k$ ,

$$N(k) = \frac{1}{\delta k} \sum_{k \leq |\mathbf{q}| < k + \delta k} 1, \quad (4.2)$$

so ergibt sich in erster Ordnung für  $k < k_B$  ein Verhalten  $N(k) \propto k^2$ , und für  $k > k_B$  der Abfall  $N(k) \propto 1/k$  [16].

(ii) Die Wellenvektorausdünnung wird so gewählt, dass die Modenzahldichte  $N(k)$  sich wie ein Potenzgesetz  $N(k) \propto k^\alpha$  verhält, mit  $-1 \leq \alpha \leq 2$ .

## 4.2 Flatness und Skewness der Geschwindigkeitsableitungen

In diesem Abschnitt wird der Gradient  $\partial_1 u_1$ , eine die Intermittenz auf kleinen Skalen charakterisierende Größe, untersucht und die Frage gestellt, wie er von der Wellenvektorausdünnung abhängt.

In Abbildung 4.1 sind die Flatness  $F = \langle (\partial_1 u_1)^4 \rangle / \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle^2$  und die Skewness  $S = \langle (\partial_1 u_1)^3 \rangle / \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle^{3/2}$  als Funktion von  $k_B$  dargestellt. Bei  $k_B = k_D \approx 1/(4\eta) \approx 9$  ist ein Übergangsverhalten zu erkennen. Dabei ist  $k_D$  die Wellenzahl mit der maximalen Dissipationsrate. Für  $k_B < k_D$  bleiben Flatness und Skewness im Grunde genommen auf ihren REWA-Werten. Aber bei  $k_B > k_D$ , also wenn die volle Modenauflösung bis in den viskosen Bereich hinein reicht, beginnt ein starker Anstieg von  $F$  und  $-S$  bis zu ihren Sättigungswerten, die der vollen Simulation entsprechen. Ebenfalls eingezeichnet sind  $F$  und  $-S$  für eine Simulation mit  $k_B = 3$ , aber einer vollen Auflösung des viskosen Bereichs ab  $k > 9$ . Diese Werte sind deutlich größer als die der einfachen Simulation mit  $k_B = 3$  und unterstreichen die Wichtigkeit der vollen Auflösung des viskosen Bereichs für den korrekten Erhalt von  $F$  und  $S$ .

Betrachtet man nun den Fall der Wellenvektorausdünnung mit  $N(k) \propto k^\alpha$ , so sieht man in Abbildung 4.2, dass  $-S$  und  $F$  erst bei  $\alpha > 1.4$  bzw.  $\alpha > 1.8$  einen Übergang zu ihren Sättigungswerten beginnen. Auch hier ist praktisch die volle Phasenraumauflösung nötig, um die korrekten Werte zu erhalten.

Die erhaltenen Ergebnisse für Skewness  $S$  und Flatness  $F$  sind konsistent mit den vollen numerischen Simulationen von Cao, Chen und Che [20], die normale und hyperviskose Dämpfung des Typs  $(-1)^h \nu \nabla^{2h} \mathbf{u}(\mathbf{k})$  verwenden (normale Viskosität:  $h = 1$ ). Die Wellenvektorausdünnung bei großen  $k$  ist einer Art Hyperviskosität ähnlich. Je größer  $h$  ist, desto kleiner ist die Flatness.

## 4.3 Kompensierte ESS-Darstellungen

Im folgenden wird die Abhängigkeit der skalenaufgelösten Intermittenzkorrekturen von der Wellenvektorausdünnung am Beispiel von  $\delta \xi_6$  untersucht.

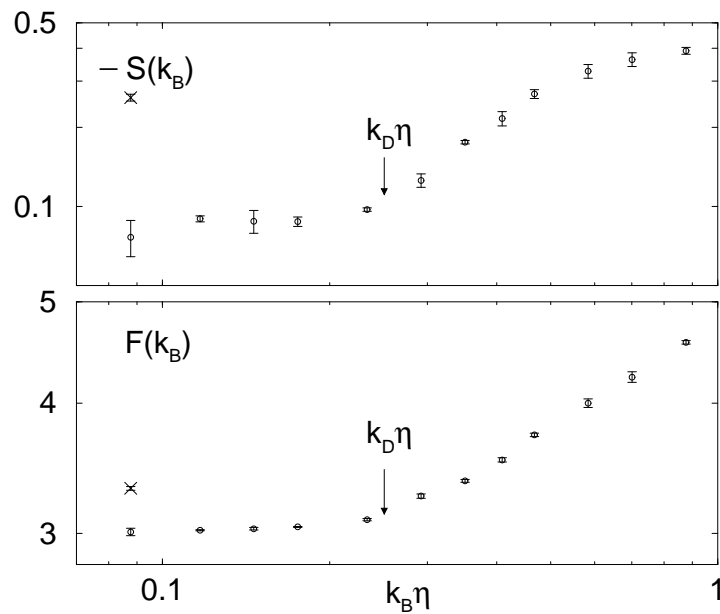


Abbildung 4.1: Skewness  $S$  und Flatness  $F$  als Funktionen von  $k_B$ . Die Fehlerbalken verdeutlichen die statistischen Unterschiede der  $S_i$  und  $F_i$  für die drei Raumrichtungen  $i = 1, 2, 3$ . Bei der gewählten Gitterauflösung erreichen  $S$  und  $F$  in etwa ihren jeweiligen Sättigungswert. Die Kreuze ganz links beziehen sich auf eine REWA-Simulation mit  $k_B = 3$ , aber mit einer vollen Auflösung des viskosen Bereichs für  $k > 9$ .

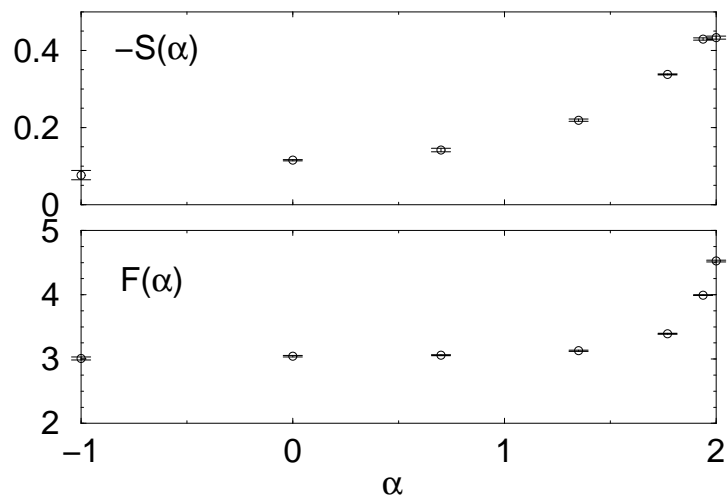


Abbildung 4.2: Skewness  $S$  und Flatness  $F$  als Funktionen von  $\alpha$ . Die Fehlerbalken verdeutlichen die statistischen Unterschiede der  $S_i$  und  $F_i$  für die drei Raumrichtungen  $i = 1, 2, 3$ .

In Abbildung 4.3 ist für verschiedene  $k_B$  die kompensierte ESS-Auftragung  $D_6^L(r)/(D_3^{*L}(r))^2$  über  $D_3^{*L}(r)$  zu sehen. Man erkennt, dass für  $k_B \geq 5$  der Wert  $\delta\xi_6 \approx -0.22$  ein guter Fit im Bereich großer  $r$  zwischen  $2\pi/k_B$  und  $L$  ist. Dieser Skalenbereich wird immer kleiner für abnehmendes  $k_B$  und verschwindet unterhalb  $k_B \approx 5$ , weil dann  $2\pi/k_B$  mit der äußeren Länge  $L$  zusammenfällt.

Abbildung 4.3 legt nahe, dass es zumindest für kleine  $Re_\lambda$  und  $10\eta \ll 2\pi/k_B \ll L$  drei Bereiche gibt<sup>1</sup>: den unterrepräsentierten viskosen Bereich mit  $r \ll 10\eta$ , in dem natürlicherweise  $D_6^L \propto (D_3^L)^2$  gilt, einen REWA-Inertialbereich im unterrepräsentierten Bereich  $[10\eta, 2\pi/k_B]$  mit sehr kleinen, aber nicht verschwindenden Intermittenzkorrekturen [12, 13, 15], siehe dazu die Steigung ungleich 0 in Abbildung 4.3(b)), und den voll aufgelösten Navier-Stokes-Inertialbereich  $[2\pi/k_B, L]$  mit den Intermittenzkorrekturen  $\delta\xi_6 \approx -0.22$  der vollen Simulation. Man kann daraus schliessen, dass die lokale Phasenraumauflösung wesentlich für die korrekte Repräsentation der Skalenkorrekturen ist, und nicht eine genügende Auflösung des viskosen Bereichs.

Um diese Aussage weiter zu untermauern, betrachtet man wieder die Simulation mit  $k_B = 3$ , die zusätzlich eine volle Auflösung des viskosen Bereichs ab  $k > 9$  aufweist. Dies resultierende ESS-Darstellung ist ebenfalls in Abbildung 4.3 zu sehen. Man kann kaum Skalenkorrekturen im Inertialbereich ablesen, d.h.  $\delta\xi_6 \approx 0$ .

In Abbildung 4.4 ist für verschiedene Modenzahldichten  $N(k) \propto k^\alpha$  die kompensierte ESS-Auftragung  $D_6^L(r)/(D_3^{*L}(r))^2$  über  $D_3^{*L}(r)$  zu sehen. Man erkennt, dass mindestens ein  $\alpha > 1.37$  nötig ist, damit sich ein Skalenverhalten mit  $\delta\xi_6 \approx -0.22$  entwickelt.

Die Navier-Stokes-Intermittenzkorrekturen können gut durch das She-Leveque-Modell (SL) gefittet werden [2, 61–64].

$$\xi_p = \frac{p}{3} - C_0 \left( \frac{p}{3}(1 - \beta)^3 - (1 - \beta^p) \right) \quad (4.3)$$

Die Werte der Modellparameter  $\beta$  und  $C_0$  sind in [61] als  $\beta = (2/3)^{1/3}$  und  $C_0 = 2$  vorgeschlagen worden. In Gleichung (4.3) wurde bereits die Restriktion  $\xi_3 = 1$  benutzt, um einen dritten Parameter, der in der Originalarbeit eingeführt wurde [61, 63, 64], zu eliminieren. Der Parameter  $C_0$  wurde mit der Rate in Verbindung gebracht, mit der die Wahrscheinlichkeit die am meisten intermittenten Ereignisse zu finden, im Limes großer  $k$  zerfällt.  $C_0$  wird interpretiert als die Kodimension der dissipativen Strukturen [19, 61, 63, 64]. In dreidimensionaler Navier-Stokes-Turbulenz sind diese Strukturen eindimensionale Filamente, also ist  $C_0 = 2$ . Diese Interpretation ist auch bei REWA-Turbulenz ( $k_B = 3$ ) [10, 12, 13] anwendbar: Aufgrund der fehlenden Wellenvektorauflösung sind die dissipativen Strukturen beinahe dreidimensional. Also ist  $C_0 \approx 0$  und gemäß Gleichung (4.3) ist dann  $\xi_p \approx p/3$ , was mit den numerischen Ergebnissen übereinstimmt [12, 13, 15]. Jedoch steht die Interpretation in Abweichung zur Simulation mit  $10\eta \ll 2\pi/k_B \ll L$ , wo man im Bereich  $[2\pi/k_B, L]$  3D-Navier-Stokes-Werte für  $\delta\xi_p$  findet, und das trotz der geringen Auflösung des viskosen Bereichs, die die Dimension der dissipativen Strukturen bestimmt.

<sup>1</sup>Die Bedingung  $10\eta \ll 2\pi/k_B \ll L$  ist in den vorliegenden Simulationen nie richtig erfüllt. Die Simulation mit  $k_B = 6$  entspricht ihr am ehesten, siehe besonders Abbildung 4.3(b))

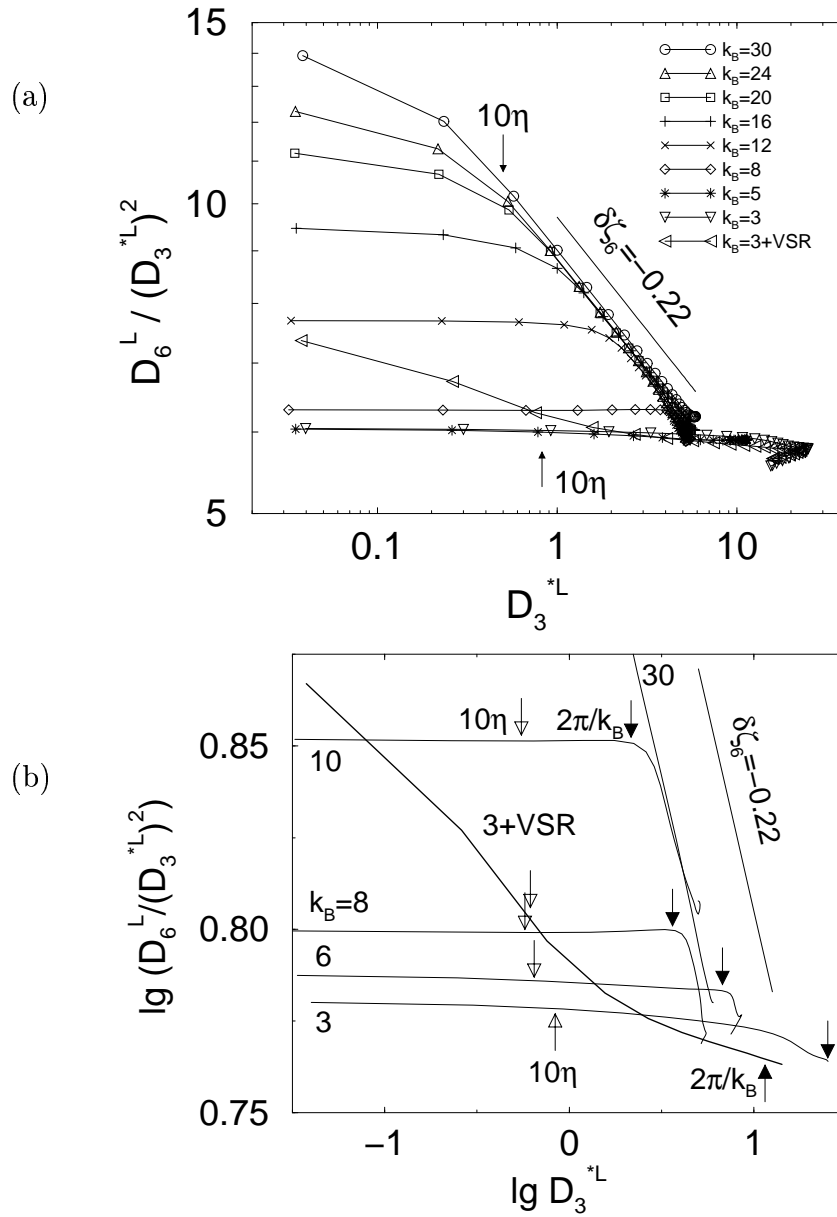


Abbildung 4.3: (a) Kompensierte ESS-Darstellung  $D_6^L(r)/(D_3^{*L}(r))^2$  über  $D_3^{*L}(r)$  für verschiedene  $k_B$ . Die Steigungen sind die  $\delta \xi_6$ . Daher bedeutet eine horizontale Linie klassisches Kolmogoroff-Skalenverhalten. Die offenen Pfeile zeigen auf  $r = 10\eta$  und die ausgefüllten auf  $r = 2\pi/k_B$ . Die äußere Längenskala  $L$  ist der letzte Punkt in jeder Kurve. (b) Die Vergrößerung des Ausschnitts aus (a) zeigt sehr deutlich das Skalenverhalten  $\delta \xi_6 = -0.22$  im Bereich  $[2\pi/k_B, L]$ .

#### 4.4 Verallgemeinerte ESS-Darstellungen

Während die Skalenkorrekturen  $\delta \xi_p$  von der lokalen Phasenraumauflösung abhängen, tun es ihre Quotienten

$$\rho_{p,q} = \frac{\xi_p - \xi_{3p}/3}{\xi_q - \xi_{3q}/3} \quad (4.4)$$

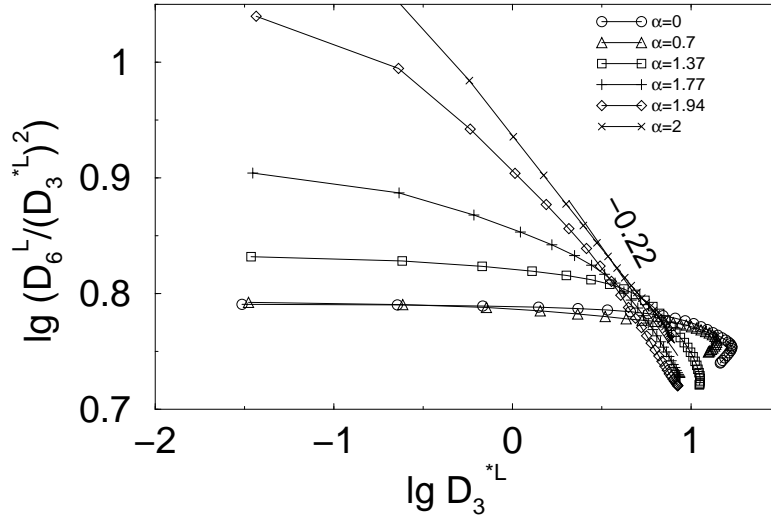


Abbildung 4.4: Kompensierte ESS-Darstellung  $D_6^L(r)/(D_3^{*L}(r))^2$  über  $D_3^{*L}(r)$  für verschiedene  $\alpha$ .

nicht. Diese Exponenten sind die relativen Skalenexponenten von zwei kompensierten Strukturfunktionen [48, 65]

$$G_p(r) = \frac{D_p^L(r)}{[D_3^{*L}(r)]^{p/3}}. \quad (4.5)$$

Wie man in einer verallgemeinerten ESS-Auftragung (GESS genannt, siehe [48, 65]) von  $G_p(r)$  über  $G_q(r)$  in Abbildung 4.5 erkennen kann, ist im ganzen aufgelösten Bereich ein Skalenverhalten vorhanden. Der Grund dafür ist, dass in einer GESS-Auftragung alle Datenpunkte des viskosen Bereichs kollabieren, da  $G_p(r) \approx \text{const}$  für  $r \leq 10\eta$ . Die Exponenten  $\rho_{p,q}$  können aus Auftragungen wie in Abbildung 4.5 gewonnen werden. Alternativ kann man sie auch aus Fits von  $\delta\xi_p$  in kompensierten ESS-Auftragungen wie Abbildung 4.3 erhalten, die, wie sich herausstellt, geringere statistische Fehler aufweisen. Obwohl die  $\delta\xi_p$  in Abbildung 4.3 offensichtlich vom gewählten  $D_3^{*L}$ -Bereich abhängen, tun dies die Quotienten  $\rho_{p,q}$  nicht.

Abbildung 4.6 zeigt ebenfalls, dass die  $\rho_{p,q}$  nicht von  $k_B$  abhängen. Ähnliche Universalität wurde von Benzi, Biferale und Travatore für das GOY-Modell gefunden [66], wo die  $\xi_p$  vom Abstand zwischen den Schalen abhängen, die  $\rho_{p,q}$  jedoch nicht.

Die relativen Skalenexponenten  $\rho_{p,q}$  werden relativ gut durch das She-Leveque-Modell beschrieben, welches

$$\rho_{p,q}^{SL} = \frac{(1 - \beta^p) - (p/3)(1 - \beta^3)}{(1 - \beta^q) - (q/3)(1 - \beta^3)} \quad (4.6)$$

vorhersagt. Obige Gleichung hängt nur von  $\beta$  ab, und nicht mehr von der Kodimension  $C_0$  der dissipativen Strukturen. Auch das log-normal-Modell [2] (LN) eignet sich zur Beschreibung der  $\rho_{p,q}$  und liefert

$$\rho_{p,q}^{LN} = \frac{p(p-3)}{q(q-3)}. \quad (4.7)$$

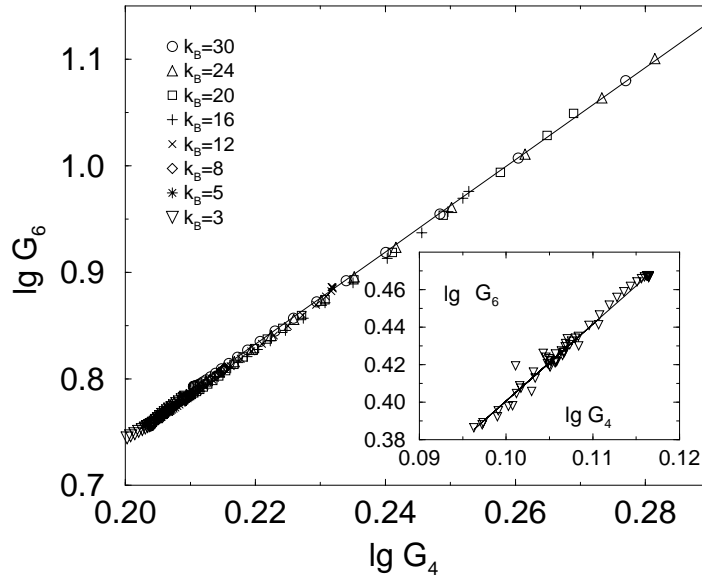


Abbildung 4.5: GESS-Auftragung  $G_6(r)$  über  $G_4(r)$  für verschiedene  $k_B$ . Die kleine Abbildung zeigt den REWA-Skalenbereich für  $Re_\lambda = 7 \cdot 10^4$  [14]. Die  $G$ -Funktionen im kleinen Bild sind aus den vollen Strukturfunktionen  $D_p^M(r)$  berechnet und nicht aus den longitudinalen wie im Hauptbild. Trotz der hohen Reynoldszahl ist der Skalenbereich sehr kurz, da die Intermittenzkorrekturen  $\delta\xi_p$  sehr klein sind. In dieser Art von Auftragung fällt der komplette viskose Bereich auf dem obersten rechten Punkt der Kurven zusammen.

Die gefitteten Werte sind grob 6% unter denen des LN-Modells und 6% über der SL-Vorhersage mit dem ursprünglich vorgeschlagenem  $\beta = (2/3)^{1/3}$ . Benutzt man das von Chen und Cao [62] vorgeschlagene  $\beta = (7/9)^{1/2}$ , dann lässt sich die Übereinstimmung noch vergrößern.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die im Inertialbereich gefundenen Intermittenzkorrekturen  $\delta\xi_p$  von der lokalen Auflösung des Phasenraums abhängen und nicht von der genügenden Auflösung des viskosen Bereichs. Interessanterweise sind die Quotienten  $\rho_{p,q}$  der Intermittenzkorrekturen  $\delta\xi_p$  unabhängig von der Phasenraumauflösung. Sie können sowohl durch das She-Leveque-Modell wie auch das log-normal-Modell relativ gut beschrieben werden. Eine REWA-Simulation bei  $Re_\lambda = 7 \cdot 10^4$  liefert trotz verschwindender  $\delta\xi_p$  einen konsistenten Wert für  $\rho_{6,4}$ .

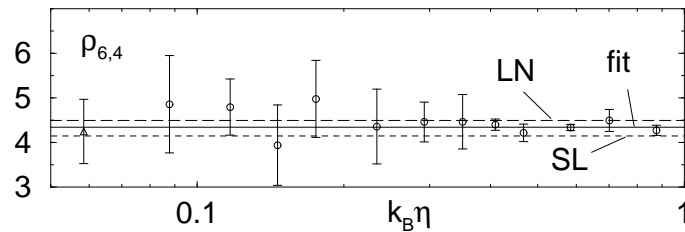


Abbildung 4.6: Relativer Skalenexponent  $\rho_{6,4}$  als Funktion des Parameters  $k_B$ . Die Fehlerbalken berücksichtigen sowohl die Qualität der linearen Regression der Skalengesetze als auch die Abweichungen von der Isotropie. Das Dreieck ganz links bezieht sich auf die REWA-Rechnung aus [14] mit  $Re_\lambda = 7 \cdot 10^4$ . Die gepunktete Linie zeigt die SL-Voraussage [61] von Gleichung (4.6) mit  $\beta = (2/3)^{1/3} \approx 0.8736$ , d.h.  $\rho_{6,4} = 4.14$ . Die gestrichelte Linie ist die Vorhersage des LN-Modells  $\rho_{6,4} = 4.5$ , und die durchgezogene Linie ist der beste Fit  $\rho_{6,4} = 4.33 \pm 0.05$ , was einem  $\beta = 0.94 \pm 0.02$  im SL-Bild entspricht und sehr nahe am Wert  $\beta = (7/9)^{1/3} \approx 0.92$  liegt, der in [62] vorgeschlagen wurde. Für andere  $(p, q)$ -Paare ist die Universalität und die Übereinstimmung mit SL und LN ähnlich gut.

---

## 5 Unterschiedliche Intermittenz der longitudinalen und transversalen Fluktuationen

---

### 5.1 Die experimentelle Situation

In diesem Kapitel wird das unterschiedliche Skalenverhalten der longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen  $D_p^L(r)$  und  $D_p^T(r)$  genau untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass es signifikante Unterschiede im Grad der Intermittenz gibt.

A priori kann man nicht von der Gleichheit der longitudinalen und transversalen Skalenexponenten  $\zeta_p^L$  und  $\zeta_p^T$  ausgehen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) der longitudinalen Geschwindigkeitsdifferenzen  $v^L(r) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_r^L$  ist schief, da Information durch die Geschwindigkeit selbst vom Ort  $\mathbf{x}$  nach  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  übertragen wird. Deswegen verschwinden die ungeraden Momente von  $v^L(r)$  nicht, es ist also  $D_p^L(r) \neq 0$ . Die PDF der transversalen Geschwindigkeitsdifferenzen  $v^T(r) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_r^T$  hingegen ist symmetrisch und führt zum Verschwinden aller ungeraden Momente,  $D_p^T(r) \equiv 0$ ,  $p$  ungerade.

In der aktuellen Literatur stößt man auf widersprüchliche Ergebnisse: Während Übereinstimmung herrscht, dass sowohl  $\zeta_p^L$  wie auch  $\zeta_p^T$  signifikante Abweichungen zum klassisch erwarteten Wert  $p/3$  aufweisen und dass die  $\zeta_p^L$  gut mit der Gleichung (4.3) aus dem She-Leveque-Modell gefittet werden können, existieren unterschiedliche Meinungen bezüglich der Frage, ob  $\zeta_p^L \neq \zeta_p^T$  gilt. Van de Water et al. [67, 72] finden für die Scherströmung, dass die Absolutbeträge der transversalen Intermittenzkorrekturen  $\delta\zeta_p^T = \zeta_p^T - p/3$  signifikant größer sind als die der longitudinalen Korrekturen  $\delta\zeta_p^L = \zeta_p^L - p/3$ . Das gleiche Ergebnis erhalten Camussi und Benzi für die Jet-Strömung [68] sowie Boratav und Pelz in zerfallender numerischer Turbulenz [28]. Andererseits ergeben kürzlich durchgeführte Experimente von Camussi et al. [69] sowie Kahalerras et al. [25] keine signifikanten Abweichungen der  $\delta\zeta_p^L$  von den  $\delta\zeta_p^T$ . Experimente von Noullez et al. [70] führen zu  $\delta\zeta_p^T$ , die vergleichbar sind mit den  $\delta\zeta_p^L$  anderer Experimente. Um eine einfache quantitative Aussage über die Intermittenzkorrekturen zu machen, ist es üblich,  $\delta\zeta_6$  anzugeben. Die Ergebnisse der oben genannten Experimente und Simulationen sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

Die Tabelle 5.1 beinhaltet jedoch nur eine begrenzte Aussagekraft, da sich die Definitionen der  $\delta\zeta_p^{L,T}$  von Experiment zu Experiment unterscheiden. In allen Experimenten mit kleiner Reynoldszahl [28, 68–70] konnten die Skalenexponenten nur mit Hilfe der ESS-Methode bestimmt werden, wobei die mit dem Absolutbetrag definierte Strukturfunktion  $D_3^*(r)$  verwendet wurde. Die ISR-Skalenexponenten von derartigen Auftragungen werden im folgenden mit  $\xi_p = \zeta_p/\zeta_3^*$  bezeichnet. Da im Inertialbereich  $\zeta_3^L = 1$  gilt, erwartet man  $\xi_p^L = \zeta_p^L$  falls  $\zeta_3^{*L} = \zeta_3^L$  ist. In Experimenten erhält man jedoch kleine Abweichungen von  $\zeta_3^{*L} = 1$ . Deswegen können im Prinzip  $\zeta_p^L$  und  $\xi_p^L$

Referenz	Strömung	$Re_\lambda$	$-\delta\xi_6^L$	$-\delta\xi_6^T$
van de Water et al. [67]	Scher	bis 600	0.18 – 0.20	0.27 – 0.31
Camussi und Benzi [68]	Jet	250	0.25	0.38
Camussi et al. [69]	Windtunnel	37	$0.19 \pm 0.03$	$0.22 \pm 0.03$
Boratav und Pelz [28]	zerf. num.	$\sim 100$	0.23	0.43
Noullez et al. [70]	Jet	bis 600	–	$0.25 \pm 0.10$
diese Arbeit	angetr. num.	110	$0.21 \pm 0.01$	$0.43 \pm 0.01$
diese Arbeit	angetr. num.	70	$0.22 \pm 0.01$	$0.43 \pm 0.01$

Tabelle 5.1: Intermittenzkorrekturen  $\delta\xi_6^L$  und  $\delta\xi_6^T$  für die longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen sechster Ordnung für verschiedene numerische und experimentelle Strömungen. (van de Water benutzt nicht das ESS-Auswerteverfahren, sondern gibt normalisierte Skalenexponenten  $\zeta_p/\zeta_3$  an.)

leicht voneinander abweichen, siehe dazu auch [22]. Für die transversale Strukturfunktion gibt es keine Relation der Form (2.6). Van de Water [67] findet  $\zeta_3^{*T} = 1.08$ .

Es stellt sich die Frage nach der Ursache der in Tabelle 5.1 aufgeführten Diskrepanzen. Es liegt nahe, die verschiedenen Strömungsgeometrien dafür verantwortlich zu machen, im besonderen die unterschiedliche Stärke der Scherung und die Anisotropie. Andererseits wurde festgestellt, dass zumindest  $\delta\xi_6^L$  weitgehend unabhängig von der Strömungsgeometrie ist [41]. Die numerische Strömung in [28], die ganz klar  $\delta\xi_6^L \neq \delta\xi_6^T$  zeigt, ist in hohem Maß isotrop. In Referenz [74] wird die Vermutung geäußert, dass das Zerfallen der Turbulenz in [28] ein möglicher Ursprung für die Diskrepanz zwischen longitudinalen und transversalen Intermittenzkorrekturen sei.

In den folgenden Abschnitten wird das in Tabelle 5.1 ersichtliche widersprüchliche Bild genau untersucht. Für das Verständnis der Intermittenz in der Navier-Stokes-Dynamik ist es von grundlegendem Interesse, dass nicht nur das Geschwindigkeitsfeld und dessen Ableitungen unabhängiges Skalenverhalten aufweisen, wie in [31] untersucht wurde, sondern dass es bereits zwei Geschwindigkeitsfelder  $v^L(r)$  und  $v^T(r)$  mit unterschiedlichem Skalenverhalten gibt.

## 5.2 Kompensierte ESS-Darstellungen

Um den Grad der Intermittenz in den longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen zu bestimmen, werden kompensierte ESS-Auftragungen  $D_6/(D_3^*)^2$  über  $D_3^*$  verwendet. Wie man in Abbildung 5.1 sieht, ist das Skalenverhalten deutlich verschieden. Es ergeben sich für die isotrope Simulation (I) bei  $Re_\lambda = 110$  die Werte  $\delta\xi_6^L = -0.21 \pm 0.01$  und  $\delta\xi_6^T = -0.43 \pm 0.01$ . Für die gleichfalls durchgeführte Simulation mit anisotroper Energieeinfütterung (A) erhält man im Rahmen der Fehlerbalken die gleichen Resultate  $\delta\xi_6^L = -0.23 \pm 0.01$  und  $\delta\xi_6^T = -0.40 \pm 0.01$ . Unabhängig davon, ob die Strömung nur in begrenztem Maß auf den größten Längenskalen Anisotropie zeigt (I) oder auf allen Skalen anisotrop ist (A), ergeben sich deutliche Unterschiede im Skalenverhalten der longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen. Die erhaltenen  $\delta\xi_6^{L,T}$  sind in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus [28]

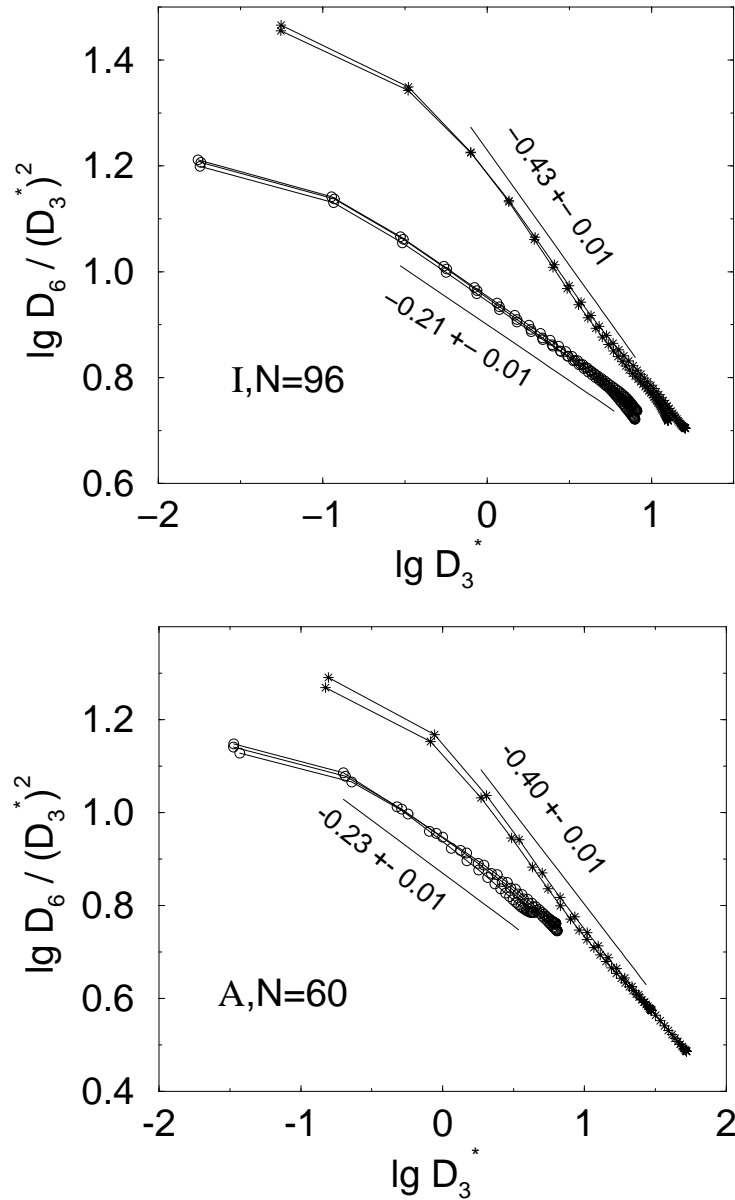


Abbildung 5.1: Kompensierte ESS-Darstellungen  $D_6^L / (D_3^{*L})^2$  über  $D_3^{*L}$  (Kreise) und  $D_6^T / (D_3^{*T})^2$  über  $D_3^{*T}$  (Sternchen). Die Steigungen im Inertialbereich sind  $\delta \xi_6^L$  und  $\delta \xi_6^T$ . Das obere Bild gehört zur isotropen Simulation mit  $N = 96$ , das untere zur anisotropen mit  $N = 60$ .

für isotrope, zerfallende, numerische Turbulenz. Im folgenden wird auf die isotrope Rechnung näher eingegangen.

Transversale Geschwindigkeitsfluktuationen zeigen also viel mehr Intermittenz als longitudinale. Es ist bekannt [6, 73], dass der transversale Geschwindigkeitsgradient  $\partial_2 u_1$  intermittenter ist als der longitudinale  $\partial_1 u_1$ . In der vorliegenden Simulation ergeben sich Werte für die Flatness von  $F_{\partial_1 u_1} = 4.9$ ,  $F_{\partial_2 u_1} = 7.0$  und  $F_{\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1} = 7.0$ .



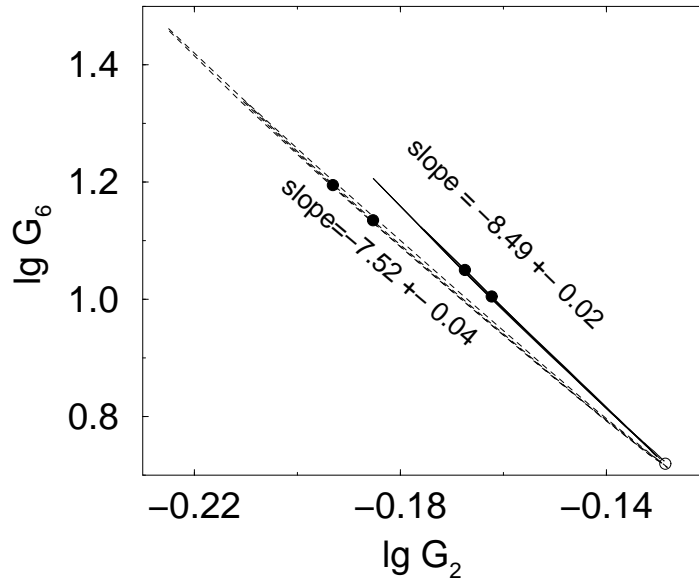


Abbildung 5.3: GESS-Darstellung  $G_6(r)$  über  $G_2(r)$  für longitudinale (durchgezogene) und transversale (gestrichelte)  $G$ -Strukturfunktionen für die isotropen Simulationen. Die Steigungen dieser Kurven sind  $\rho_{6,2}^L = -8.49 \pm 0.02$  und  $\rho_{6,2}^T = -7.52 \pm 0.04$ . Die Fehlgrenzen stammen aus einer linearen Regression jeder einzelnen Kurve und der anschließenden gewichteten Mittelung der Ergebnisse für unterschiedliche Raumrichtungen sowie verschiedene  $Re_\lambda$ . Die schwer unterscheidbaren Linien in den beiden Kurvenbüscheln stammen aus unterschiedlichen Raumrichtungen sowie  $Re_\lambda = 110$  und  $Re_\lambda = 70$ . Die gute Übereinstimmung in jedem Büschel bedeutet Isotropie und Unabhängigkeit der Skalenexponenten von  $Re_\lambda$ . Der komplette VSR fällt im obersten linken Punkt einer jeden Kurve zusammen. Die gefüllten Kreise beziehen sich auf  $r = 10\eta$  bei  $Re_\lambda = 110$  (links) und  $Re_\lambda = 70$  (rechts). Der offene Kreis bezeichnet die äußere Länge  $L$ .

ergeben sich aus der linearen Regression von GESS-Darstellungen wie Abbildung 5.3 und zusätzlich aus der gewichteten Mittelung über die unterschiedlichen Raumrichtungen. Für die kleinere Reynoldszahl  $Re_\lambda = 70$  stimmen die  $\rho_{p,q}$  mit maximal 0.5% Abweichung mit den Daten in Tabelle 5.2 überein. Darüber hinaus wurde die statistische Konvergenz der Daten geprüft, wobei anstatt über 140 jeweils nur über 30, 60 und 90 Zeiteinheiten gemittelt wurde.

Um die Qualität der GESS-Ergebnisse festzustellen, kann man die allgemein für GESS-Exponenten geltende Beziehung

$$\rho_{p,s} = \rho_{p,q} \rho_{q,s} \quad (5.1)$$

für die vorliegenden Daten prüfen. Weder für die  $\rho_{p,q}^L$  noch die  $\rho_{p,q}^T$  wurde in Tabelle 5.2 ein einziges Beispiel gefunden, in dem die Abweichungen für obige Relation größer als die Fehlerbalken waren. Zum Beispiel entspricht  $\rho_{2,4}^L \cdot \rho_{4,6}^L = 0.1177 \pm 0.0005$  dem Wert  $\rho_{2,6}^L$  im Rahmen der Fehlerbalken.

Bis hierhin stammen alle Fehlerbalken aus der Statistik. Im folgenden soll eine Aus-

$p, q$	$\rho_{p,q}^L$	$\beta^L$	$\rho_{p,q}^T$	$\beta^T$
2, 4	$-0.5093 \pm 0.0004$	$0.973 \pm 0.001$	$-0.5440 \pm 0.0011$	$0.877 \pm 0.003$
2, 5	$-0.2073 \pm 0.0002$	$0.964 \pm 0.001$	$-0.2272 \pm 0.0006$	$0.875 \pm 0.002$
2, 6	$-0.1176 \pm 0.0002$	$0.957 \pm 0.001$	$-0.1318 \pm 0.0004$	$0.873 \pm 0.002$
2, 7	$-0.0774 \pm 0.0001$	$0.952 \pm 0.001$	$-0.0884 \pm 0.0003$	$0.872 \pm 0.002$
2, 8	$-0.0555 \pm 0.0001$	$0.947 \pm 0.001$	$-0.0645 \pm 0.0003$	$0.871 \pm 0.003$
4, 5	$0.4072 \pm 0.0001$	$0.947 \pm 0.001$	$0.4177 \pm 0.0003$	$0.870 \pm 0.002$
4, 6	$0.2311 \pm 0.0001$	$0.941 \pm 0.001$	$0.2423 \pm 0.0004$	$0.869 \pm 0.003$
4, 7	$0.1521 \pm 0.0002$	$0.937 \pm 0.001$	$0.1625 \pm 0.0005$	$0.868 \pm 0.003$
4, 8	$0.1092 \pm 0.0003$	$0.933 \pm 0.002$	$0.1186 \pm 0.0005$	$0.867 \pm 0.003$
5, 6	$0.5675 \pm 0.0002$	$0.935 \pm 0.001$	$0.5800 \pm 0.0005$	$0.867 \pm 0.003$
5, 7	$0.3736 \pm 0.0004$	$0.931 \pm 0.002$	$0.3890 \pm 0.0008$	$0.867 \pm 0.003$
5, 8	$0.2682 \pm 0.0006$	$0.928 \pm 0.002$	$0.2840 \pm 0.0010$	$0.866 \pm 0.004$
6, 7	$0.6583 \pm 0.0005$	$0.927 \pm 0.002$	$0.6708 \pm 0.0008$	$0.865 \pm 0.004$
6, 8	$0.4725 \pm 0.0008$	$0.924 \pm 0.003$	$0.4901 \pm 0.0014$	$0.863 \pm 0.005$
7, 8	$0.7177 \pm 0.0007$	$0.922 \pm 0.003$	$0.7308 \pm 0.0010$	$0.860 \pm 0.005$

Tabelle 5.2:  $\rho_{p,q}^{L,T}$  für verschiedene Paare  $p, q$  aus GESS-Auftragungen wie Figur 5.3 bei  $Re_\lambda = 110$ . Nach Definition ist  $\rho_{p,q} = \rho_{q,p}^{-1}$ . Die angegebenen Fehler sind rein statistischer Natur. In der dritten und fünften Spalte sind die  $\beta$ -Werte aus Gleichung (4.6) angegeben. Die aus GESS folgende Relation  $\rho_{p,s} = \rho_{p,q}\rho_{q,s}$  kann zur Überprüfung der Qualität von GESS benutzt werden.

sage über den systematischen Fehler gemacht werden. In Abbildung 5.4 ist die lokale Steigung der Kurven aus Abbildung 5.3 dargestellt. Sowohl die longitudinale als auch die transversale lokale Steigung nehmen, absolut betrachtet, bei größer werdendem  $G_2(r)$  leicht zu. Der Fehlerbalken aus der Mittelung der lokalen Steigung ist viel größer als der statistische Fehler. Eine Mittelung bis zur Skala  $r = 2.0 \approx 100\eta$  ergibt  $\rho_{6,2}^L = -8.36 \pm 0.14$  und  $\rho_{6,2}^T = -7.36 \pm 0.26$ . Die Zahlenwerte für die so bestimmten  $\rho_{p,q}$  weisen nun etwa 10 mal so große Fehlerbalken wie bisher auf und sind in Tabelle 5.3 aufgelistet. Obwohl die systematischen Fehler eine Größenordnung höher sind als die rein statistischen, sind die die Abweichungen der  $\rho_{p,q}^L$  von den  $\rho_{p,q}^T$  (und der daraus folgenden  $\beta$ -Werte) weiterhin statistisch signifikant.

Wie in Gleichung (4.6) zu sehen ist, hängen die  $\rho_{p,q}$  innerhalb des SL-Modells allein von  $\beta$  ab. Für jedes  $\rho_{p,q}$  ist nun in den Tabellen 5.2 und 5.3 der Wert  $\beta_{p,q}$  mitsamt Fehlerbalken berechnet worden. Bei exakter Gültigkeit des SL-Modell dürfte keine Abhängigkeit der  $\beta$ -Werte von den  $p, q$  auftreten.

In Abbildung 5.5 sind die  $\beta_{p,q}^{L,T}$  aus Tabelle 5.3 samt systematischer Fehlerbalken dreidimensional dargestellt, womit nocheinmal der deutliche Unterschied zwischen den  $\beta^L$  und  $\beta^T$  gezeigt wird. Dieses Resultat unterscheidet sich von den Ergebnissen von Camussi und Benzi [68], die für die Abweichung von  $\beta^L$  und  $\beta^T$  zum SL-Wert  $\beta = (2/3)^{1/3} \approx 0.874$  maximal 1.2% = 0.010 angeben.

Im Gegensatz zum SL-Modell, das keine  $p, q$ -Abhängigkeit von  $\beta$  enthält, ist für größer werdende  $p$  und  $q$  ein leichter Abfall der  $\beta_{p,q}^L$  zu erkennen. Eine Mittelung

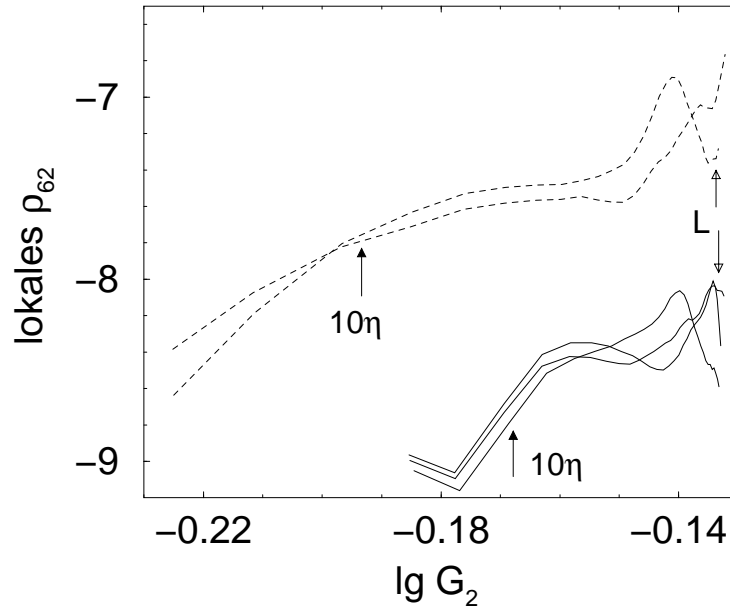


Abbildung 5.4: Lokale Steigungen der Abbildung 5.3 für die Simulation mit  $Re_\lambda = 110$ . Die zwei gestrichelten Linien sind für die beiden unterschiedlichen Raumrichtungen für die transversalen Strukturfunktionen, die drei durchgezogenen Linien für die drei Raumrichtungen für die longitudinalen Strukturfunktionen. Wenn man den Mittelwert (für Skalen bis zu  $r = 2.0 \approx 100\eta$ ) berechnet, dann ergibt sich  $\rho_{6,2}^L = -8.36 \pm 0.14$  und  $\rho_{6,2}^T = -7.36 \pm 0.26$ . Die Pfeile beziehen sich auf  $10\eta$  und  $L$ .

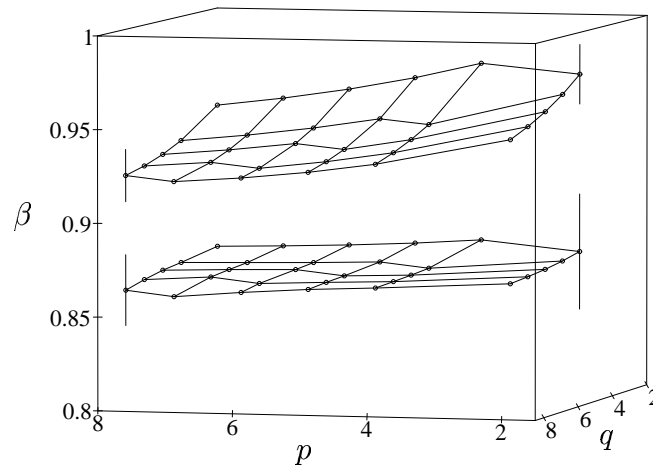


Abbildung 5.5: Die longitudinalen und transversalen Hierarchyparameter  $\beta_{p,q}^L$  (oben) und  $\beta_{p,q}^T$  (unten). Die Daten stammen aus Tabelle 5.3, d.h. für die isotrope Simulation mit  $Re_\lambda = 110$ . Die Mittelungszeit beträgt 140 dimensionslose Zeiteinheiten. Um einen Eindruck des Fehlers zu bekommen, werden zwei Fehlerbalken angegeben, die die viel größeren systematischen Fehler anstatt die statistischen repräsentieren. Man sieht, dass  $\beta^L$  und  $\beta^T$  deutlich unterschiedlich sind und leicht von  $p$  und  $q$  abhängen.

$p, q$	$\rho_{p,q}^L$	$\beta^L$	$\rho_{p,q}^T$	$\beta^T$
2, 4	$-0.514 \pm 0.005$	$0.958 \pm 0.016$	$-0.556 \pm 0.012$	$0.846 \pm 0.031$
2, 5	$-0.210 \pm 0.003$	$0.950 \pm 0.014$	$-0.234 \pm 0.007$	$0.848 \pm 0.027$
2, 6	$-0.120 \pm 0.002$	$0.944 \pm 0.012$	$-0.136 \pm 0.005$	$0.849 \pm 0.025$
2, 7	$-0.079 \pm 0.002$	$0.940 \pm 0.012$	$-0.092 \pm 0.003$	$0.851 \pm 0.023$
2, 8	$-0.057 \pm 0.001$	$0.936 \pm 0.011$	$-0.067 \pm 0.003$	$0.852 \pm 0.021$
4, 5	$0.409 \pm 0.001$	$0.936 \pm 0.011$	$0.420 \pm 0.003$	$0.851 \pm 0.021$
4, 6	$0.233 \pm 0.002$	$0.931 \pm 0.010$	$0.245 \pm 0.003$	$0.853 \pm 0.020$
4, 7	$0.153 \pm 0.002$	$0.927 \pm 0.010$	$0.165 \pm 0.003$	$0.855 \pm 0.018$
4, 8	$0.110 \pm 0.001$	$0.924 \pm 0.011$	$0.120 \pm 0.003$	$0.856 \pm 0.018$
5, 6	$0.569 \pm 0.002$	$0.926 \pm 0.010$	$0.582 \pm 0.003$	$0.855 \pm 0.018$
5, 7	$0.376 \pm 0.002$	$0.923 \pm 0.010$	$0.391 \pm 0.004$	$0.857 \pm 0.018$
5, 8	$0.270 \pm 0.003$	$0.920 \pm 0.011$	$0.286 \pm 0.004$	$0.858 \pm 0.018$
6, 7	$0.660 \pm 0.002$	$0.919 \pm 0.011$	$0.672 \pm 0.003$	$0.858 \pm 0.018$
6, 8	$0.475 \pm 0.004$	$0.917 \pm 0.012$	$0.491 \pm 0.005$	$0.859 \pm 0.018$
7, 8	$0.719 \pm 0.003$	$0.914 \pm 0.014$	$0.731 \pm 0.004$	$0.860 \pm 0.019$

Tabelle 5.3:  $\rho_{p,q}^{L,T}$  für verschiedene Paare  $p, q$ , jeweils bestimmt aus der lokalen Steigung von GESS-Plots, siehe z.B. Figur 5.4. Die Fehler sind systematische Fehler und rühren daher, dass die lokale Steigung nicht konstant ist. In der dritten und fünften Spalte sind wieder die  $\beta$ -Werte aus Gleichung (4.6) angegeben. Wenn man diese  $\beta$ -Werte mittelt, ergibt sich  $\beta^L = 0.930$  und  $\beta^T = 0.855$ .

über alle  $\beta_{p,q}$  ergibt die Werte  $\beta^L = 0.947$  und  $\beta^T = 0.870$ .

Kennt man  $\beta$ , so ist nur noch der Parameter  $C_0$  in der SL-Gleichung (4.3) übrig. Mit den obigen Mittelwerten  $\beta^L = 0.947$  und  $\beta^T = 0.870$  ergibt sich für einen Fit der  $\xi_p$  in Abbildung 5.2 eine sehr gute Übereinstimmung für die Parameter  $C_0^L = 9.3$  (mit einem kleinsten Fehlerquadrat  $\chi^2 = 10$ ) und  $C_0^T = 3.7$  (mit  $\chi^2 = 1$ ). Bei den longitudinalen Daten ist dieser Fit besser als wenn man die ursprünglichen SL-Parameter  $\beta = (2/3)^{1/3}$  und  $C_0 = 2$  einsetzt. Gibt man  $\beta^L = \beta^T = (2/3)^{1/3}$  vor, erhält man  $C_0^L = 1.97$  mit  $\chi^2 = 10^3$  und  $C_0^T = 3.9$  mit  $\chi^2 = 0.8$ . Die  $\chi^2$ -Werte für  $C_0^L$  sind größer als für  $C_0^T$ , da die Fehler der  $\delta\xi_p^L$  kleiner sind als die der  $\delta\xi_p^T$ . Den aus den Fits erhaltenen Parametern  $C_0$  kann hier keine physikalische Bedeutung im Sinne einer Kodimension der dissipativen Strukturen im Geschwindigkeitsfeld zugerechnet werden.

## 5.4 Untersuchung der Hierarchien

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, ob die unterschiedlichen Intermitenzkorrekturen  $\delta\xi_p^L$  und  $\delta\xi_p^T$  zu unterschiedlichen Hierarchien der Momente gehören. Von She und Leveque [61] wurde für die  $r$ -gemittelte Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$  vorgeschlagen, dass

$$\frac{\langle \epsilon_r^{p+1} \rangle}{\langle \epsilon_r^p \rangle} = B_p' \left( \frac{\langle \epsilon_r^p \rangle}{\langle \epsilon_r^{p-1} \rangle} \right)^{\beta^3} (\epsilon_r^{(\infty)})^{1-\beta^3}. \quad (5.2)$$

Dabei ist  $\epsilon_r$  definiert als Mittelwert von  $\epsilon(\mathbf{x})$  über eine Kugel mit dem Radius  $r$ :

$$\epsilon_r = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \epsilon(\mathbf{x}) dV. \quad (5.3)$$

$B'_p$  ist eine Konstante und

$$\epsilon_r^{(\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} (\langle \epsilon_r^{p+1} \rangle / \langle \epsilon_r^p \rangle). \quad (5.4)$$

$\beta$  wird als SL-Hierarchieparameter bezeichnet. Eine derartige Hierarchie bedeutet, dass die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion einer log-Poisson-Statistik gehorcht [63, 64]. Ruiz Chavarria et al. [26] haben die Idee der Hierarchien auf Strukturfunktionen erweitert: Setzt man die Gültigkeit von Kolmogoroffs Refined Similarity Hypothesis voraus [2, 27],

$$D_p(r) \sim \langle \epsilon_r^{p/3} \rangle r^{p/3}, \quad (5.5)$$

dann kann die Hierarchie der Strukturfunktionen aus der SL-Hierarchie (5.2) abgeleitet werden [26, 48]. Dabei ergibt sich

$$\frac{D_{p+1}(r)}{D_p(r)} = B''_p \left( \frac{D_p(r)}{D_{p-1}(r)} \right)^\beta (D_{(\infty)})^{1-\beta}, \quad (5.6)$$

$$D_{(\infty)}(r) = \lim_{p \rightarrow \infty} (D_{p+1}(r)/D_p(r)) = (r \epsilon_r^{(\infty)})^{1/3}. \quad (5.7)$$

$B''_p$  ist konstant. Aus Gleichung (5.6) folgt die Beziehung [26, 48] :

$$F_{p+1}(r) = B_p (F_p(r))^\beta \tilde{F}(r). \quad (5.8)$$

Dabei ist

$$F_{p+1} = \frac{D_{p+1}(r)}{D_p(r)} \quad (5.9)$$

und

$$\tilde{F}(r) = \left( \frac{D_6(r)}{(D_3^*(r))^{1+\beta^3}} \right)^{(1-\beta)/[3(1-\beta^3)]}. \quad (5.10)$$

Mit den aus den obigen Abschnitten stammenden gemittelten  $\beta$ -Werten wird nun  $F_{p+1}(r)$  über  $(F_p(r))^\beta \tilde{F}(r)$  aufgetragen. Gelten die Gleichungen (5.6) und (5.8), so muss die Steigung dieser Auftragung gleich 1 sein. Tatsächlich ist die Steigung nahe bei 1, wie man Abbildung 5.6 und Tabelle 5.4 entnehmen kann. Damit wird die Annahme der Ungleichheit der  $\beta^L$  und  $\beta^T$  weiter gestützt. Die beste Übereinstimmung in Tabelle 5.4 erhält man für  $p = 4$  bis  $p = 6$ . In diesem Fall stimmen die mittleren  $\beta$ -Werte am besten mit den  $\beta_{p,q}$  überein. (Siehe dazu Tabelle 5.2) Für die anderen  $p$  könnte man die Übereinstimmung verbessern, indem man die dazugehörigen  $\beta_{p,q}$  verwendet. Jedoch geht die Strukturfunktion sechster Ordnung immer über  $\tilde{F}(r)$  ein.

Darüberhinaus ergibt sich in Gleichung (5.8) eine Abhängigkeit des Vorfaktors  $B_p$  von  $p$ . Es scheint deswegen hier nicht wie in [66] und [69] möglich zu sein,  $\beta$  aus (5.8) zu bestimmen, indem man  $\log F_{p+1}(r)$  über  $\log F_p(r)$  für festes  $r$  als eine Funktion von  $p$  aufträgt.

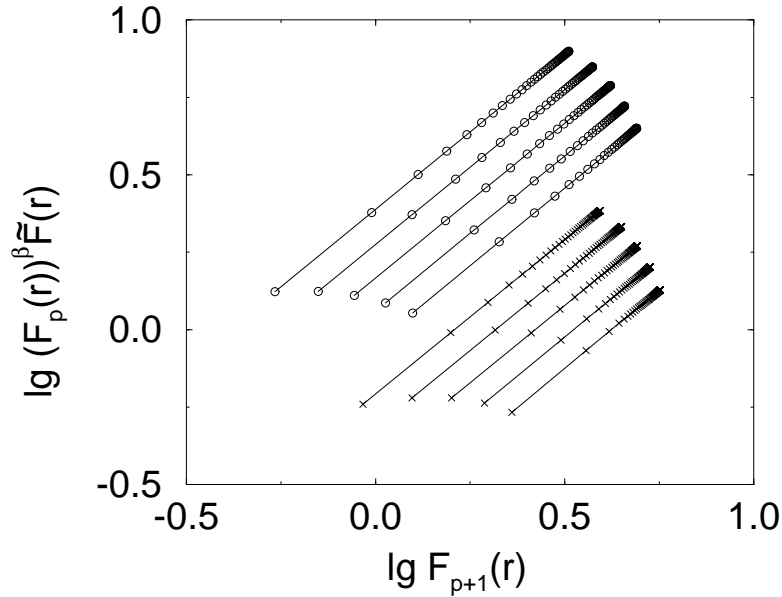


Abbildung 5.6: Doppeltlogarithmische Auftragung von  $F_{p+1}(r)$  über  $(F_p(r))^\beta \tilde{F}(r)$  für verschiedene  $p$  für die longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen,  $\beta^L = 0.947$  und  $\beta^T = 0.870$ . Die Kurven sind willkürlich verschoben, damit man die Steigungen besser sehen kann. Die oberen fünf Linien sind für die longitudinalen Strukturfunktionen,  $p = 3$  (oben) bis  $p = 7$  (unten). Die unteren fünf Linien sind für die transversalen Strukturfunktionen,  $p = 3$  (oben) bis  $p = 7$  (unten).

$p$	$\beta^L = 0.947$ Steigung $L$	$B_p^L$	$\beta^T = 0.870$ Steigung $T$	$B_p^T$	$\beta^L = (2/3)^{1/3}$ Steigung $L$	$B_p^L$
3	$0.9984 \pm 0.0001$	0.975	$0.9988 \pm 0.0002$	0.981	$0.9988 \pm 0.0001$	0.981
4	$0.9995 \pm 0.0001$	0.944	$0.9993 \pm 0.0004$	0.961	$0.9936 \pm 0.0001$	0.969
5	$1.0020 \pm 0.0004$	0.925	$1.0000 \pm 0.0005$	0.951	$0.9895 \pm 0.0002$	0.967
6	$1.0050 \pm 0.0007$	0.910	$1.0020 \pm 0.0007$	0.945	$0.9854 \pm 0.0004$	0.970
7	$1.0080 \pm 0.0010$	0.899	$1.0040 \pm 0.0016$	0.940	$0.9810 \pm 0.0007$	0.977

Tabelle 5.4: Steigungen der Auftragungen von  $\log_{10} F_{p+1}(r)$  über  $\log_{10}((F_p(r))^\beta \tilde{F}(r))$ . Gemäß Gleichung (5.8) sollten die Steigungen 1 sein, was sehr gut für  $\beta^L = 0.947$  und  $\beta^T = 0.870$  erfüllt ist. Zum Vergleich sind auch die Steigungen angegeben, wenn man den SL-Wert  $\beta^L = (2/3)^{1/3}$  für die longitudinale Strukturfunktion nimmt. Die Abweichungen zur Steigung 1 sind dann größer. Die Konstanten  $B_p$  in (5.8) zeigen eine leichte  $p$ -Abhängigkeit.

## 5.5 REWA-Ergebnisse bei hohen Reynoldszahlen

Es werden ESS-Auftragungen für longitudinale und transversale Strukturfunktionen sechster Ordnung für die REWA-Approximation untersucht. Die Taylor-Reynoldszahlen sind  $Re_\lambda = 8 \cdot 10^2$  und  $Re_\lambda = 1.4 \cdot 10^5$ . In Abbildung 5.7 kann man keinen Unterschied zwischen den longitudinalen und transversalen Skalenexponenten feststellen. Man erhält  $\delta\xi_6^L \approx \delta\xi_6^T \approx -0.009$ , was (im Absolutbetrag gesehen)

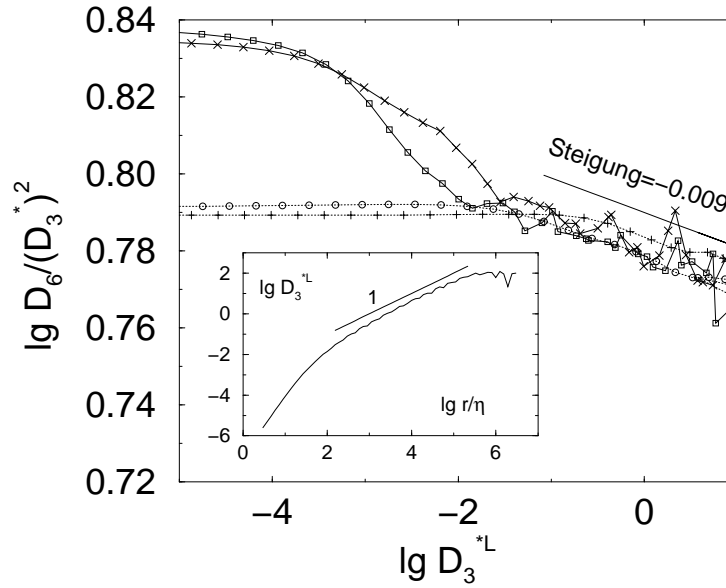


Abbildung 5.7: Kompensierte ESS-Darstellungen für die Strukturfunktionen sechster Ordnung für eine REWA-Rechnung mit 50 Moden pro Stufe. Die longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen zeigen die gleiche Steigung  $\delta\xi = -0.009$ . Die Quadrate bezeichnen  $Re_\lambda = 1.4 \cdot 10^5$ , longitudinal; die Kreuze  $Re_\lambda = 1.4 \cdot 10^5$ , transversal; die Kreise  $Re_\lambda = 8 \cdot 10^2$ , longitudinal; die Pluszeichen  $Re_\lambda = 8 \cdot 10^2$ , transversal. Die kleine Abbildung zeigt  $D_3^{*L}(r)$  bei  $Re_\lambda = 1.4 \cdot 10^5$ , um eine Idee zu bekommen, zu welchen  $r/\eta$  die Datenpunkte im Hauptbild korrespondieren.

viel kleiner ist als der experimentelle oder numerische Wert  $\delta\xi_6^L \approx -0.21$ . Die relativen Fehler für die  $\delta\xi$  sind für REWA viel größer als für die volle numerische Simulation. Innerhalb REWA kann deshalb ein Unterschied in der longitudinalen und transversalen Intermittenz nicht ausgeschlossen werden.

Es ist unklar, ob die REWA-Ergebnisse bedeuten, dass die Unterschiede im Skalenverhalten von  $D_p^T$  über  $D_3^{*T}$  und  $D_p^L$  über  $D_3^{*L}$  in der vollen numerischen Simulation bei kleinem  $Re_\lambda$  ein Finite- $Re_\lambda$ -Effekt sind oder ob sie Artefakte der Modenausdünnung bei großen  $\mathbf{k}$  sind, die die kleinskaligen Strukturen unterdrückt. In [28] werden solche Strukturen mit dem unterschiedlichen Skalenverhalten der longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen verknüpft. Innerhalb REWA wurde keine  $Re_\lambda$ -Abhängigkeit der  $\delta\xi_p^L$  und  $\delta\xi_p^T$  festgestellt, siehe auch Abbildung 5.7.

Es wurden ebenfalls GESS-Auftragungen mit REWA-Daten durchgeführt. Dabei ergeben sich keine signifikanten Unterschiede zwischen den  $\rho_{p,q}^L$  und den  $\rho_{p,q}^T$ .

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Skalenkorrekturen  $\delta\xi_p^L$  und  $\delta\xi_p^T$  signifikant voneinander abweichen. Dies gilt auch für die GESS-Exponenten  $\rho_{p,q}^L$  und  $\rho_{p,q}^T$ . Innerhalb des She-Leveque-Modells bedeutet dies, dass longitudinale und transversale Fluktuationen unterschiedlichen Hierarchien der Momente gehorchen. Darüberhinaus hängen die Hierarchieparameter  $\beta^L$  und  $\beta^T$  aus dem She-Leveque-Modell leicht von der Ordnung der zur Berechnung verwendeten Momente ab.



---

## 6 Irreduzible SO(3)-Amplituden

---

### 6.1 Einführung

Die fundamentalen Objekte zur Analyse der Struktur des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sind die tensoriellen Momente der Geschwindigkeitsdifferenzen  $v_i(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t)$ , gemittelt über Zeit  $t$  und Ort  $\mathbf{x}$ , als Funktion des Abstandes  $\mathbf{r}$ :

$$D_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{r}) = \langle v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_n} \rangle \quad (6.1)$$

Liegt  $r = |\mathbf{r}|$  im Inertialbereich, wird algebraisches Skalenverhalten der Momente erwartet. Ist das turbulente Geschwindigkeitsfeld (nahezu) statistisch isotrop, so ist es von Vorteil, anstelle der Tensorkomponenten deren Rotationsinvarianten zu betrachten, da man auf diese Weise die Anzahl der Skalenexponenten reduzieren kann. Die meistbenutzten Invarianten sind die longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen  $D_p^L(r)$  und  $D_p^T(r)$  sowie die vollen Strukturfunktionen  $D_p^M(r)$ . Im Fall  $p = 2$  ergibt sich aus der Bedingung der Divergenzfreiheit die Gleichheit der Skalenexponenten  $\zeta_2^L = \zeta_2^T = \zeta_2^M$ . Wie aus dem letzten Kapitel ersichtlich wurde, ist für  $p > 2$   $\zeta_p^L \neq \zeta_p^T$ .

L'vov, Podivilov und Procaccia äußern in [29] die Vermutung, dass nicht die longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen ein klares Skalenverhalten im Inertialbereich zeigen, sondern die Amplituden  $d_n^l(r)$ , die sich aus der Zerlegung des Struktur tensors (6.1) in die irreduzible Darstellung der Rotationsgruppe SO(3) ergeben. Für den Fall  $n = 2$  gilt die Zerlegung

$$\langle v_i v_j \rangle = D_{ij}^0(\mathbf{e}_r) d_2^0(r) + D_{ij}^2(\mathbf{e}_r) d_2^2(r) = \delta_{ij} d_2^0(r) + \left[ \delta_{ij} - \frac{3r_i r_j}{r^2} \right] d_2^2(r). \quad (6.2)$$

Die Tensoren  $D_{ij}^l(\mathbf{e}_r)$  der Zerlegung (6.2) stehen orthogonal aufeinander. Die Amplituden  $d_n^l(r)$  sind folgendermaßen gegeben:

$$d_n^l(r) \propto \langle (\mathbf{v}^2(\mathbf{r}; \mathbf{x}, t))^{n/2} P_l(\mathbf{v}/v \cdot \mathbf{r}/r) \rangle. \quad (6.3)$$

Dabei durchläuft  $l$  den Bereich  $0 \leq l \leq n$  mit der gleichen Parität wie  $n$  und  $P_l$  ist das Legendre-Polynom der Ordnung  $l$ .

Für die Zerlegung der Struktur tensors zweiter und vierter Ordnung sind die Amplituden  $d_2^l(r)$  und  $d_4^l(r)$  Linearkombinationen der longitudinalen, transversalen und Modulus-Strukturfunktionen. Die Amplitude der Einheitsdarstellung  $d_n^0(r)$  ist proportional zu den Modulus-Strukturfunktionen:  $d_n^0(r) \propto D_n^M(r)$ . Mit den Definitionen  $a_0 = d_2^0$ ,  $a_2 = d_2^2$ ,  $c_0 = d_4^0$ ,  $c_2 = d_4^2$ ,  $c_4 = d_4^4$  ergibt sich [29]:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2^M \\ D_2^L \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{7}} & \frac{3}{2\sqrt{7}} & -\frac{3}{2\sqrt{7}} \\ \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{10}{\sqrt{70}} & \frac{15}{\sqrt{280}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_4^M \\ D_4^L \\ D_4^T \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Die rechten Seiten von (6.4) und (6.5) kann man auch anders darstellen, indem man z.B.  $D_2^T(r)$  anstatt  $D_2^L(r)$  in (6.4) benutzt, oder etwa gemischte longitudinale und transversale Momente in (6.5) verwendet. Dies ist geschehen in Gleichung (13.81) in [1], wo man die folgenden Größen verwendet hat:  $D_{11} = D_2^L$ ,  $D_{22} = D_2^T/2$ ,  $D_{1111} = \langle v_1^4 \rangle = D_4^L$ ,  $D_{1122} = \langle v_1^2 v_2^2 \rangle$ , und  $D_{2222} = \langle v_2^4 \rangle = 3D_{2233} = 3D_4^T/8$ . Dabei liegt die 1-Achse in longitudinaler Richtung parallel zu  $\mathbf{r}$ . Für die so definierten Strukturfunktionen erhält man:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{8}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{8}{3\sqrt{7}} \\ \sqrt{\frac{8}{35}} & -12\sqrt{\frac{2}{35}} & \sqrt{\frac{8}{35}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1111} \\ D_{1122} \\ D_{2222} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung sind die Skalenexponenten von  $a_0(r)$  und  $a_2(r)$  im Inertialbereich gleich und entsprechen dem bekannten  $\zeta_2^L = \zeta_2^T = \zeta_2^M$ . Aber ab  $n \geq 4$  ergeben sich Amplituden  $d_n^l(r)$ , die prinzipiell unterschiedliches Skalenverhalten  $d_n^l(r) \propto r^{\zeta_n^l}$  im Inertialbereich zeigen können [29].

Die Aussage von L'vov et al. ist nun, dass die Invarianten  $a_l$  und  $c_l$  auf der linken Seite der Gleichungen (6.4), (6.5) und (6.6) ausgezeichnet sind. Denn die  $d_n^l(r)$  sind die Amplituden der Zerlegung des Strukturtenors in die irreduzible Darstellung der Rotationssymmetriegruppe  $SO(3)$ .

Im folgenden wird das Skalenverhalten der  $a_l$  und  $c_l$  für Simulationsdaten bei  $Re_\lambda = 110$  numerisch untersucht und mit Ergebnissen aus einer Batchelor-Parametrisierung der Funktionen  $d_n^0(r)$  verglichen.

## 6.2 Numerische Ergebnisse

Die Momente zweiter Ordnung zeigen aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung gleiches Skalenverhalten im Inertialbereich. Bei klassischem Verhalten  $\zeta_2^L = 2/3$  ergibt sich  $D_2^L(r) = 4D_2^T(r)/3$  und  $a_0(r) = 11a_2(r) = D_2^M(r)/3$ . In Abbildung 6.1 sind die  $c_{0,2,4}(r)$  in Abhängigkeit von  $r$  dargestellt. Wie für die vorliegenden kleinen  $Re_\lambda$  erwartet, sind die Skaleneigenschaften der  $c_{0,2,4}(r)$  kaum ausgeprägt, da es noch keinen entwickelten Inertialbereich gibt. Im viskosen Bereich gilt  $c_{0,2,4}(r) \propto r^4$ , gefolgt von einem Übergangsbereich und  $c_{0,2,4} \approx const$  im Energieeinfütterungsbereich bei  $r \approx L$ . Für steigendes  $l$  stellt man fest, dass (i) die Größenordnung der  $c_l(r)$  abnimmt und (ii) der Grad der Intermittenz zuzunehmen scheint,  $\zeta_4^4 < \zeta_4^2 < \zeta_4^0 < 4/3$ . Der Grund für (i) ist, dass  $c_0$  eine Summe von positiv definiten Strukturfunktionen ist. Hingegen sind  $c_2$  und  $c_4$  aus deren Differenzen gebildet. Dies ist ähnlich wie bei  $a_2 = (D_{22} - D_{11})/3$ , welches ebenfalls kleiner ist als  $a_0 = D_{11} + 2D_{22}$ . Der Grund für (ii) ist vermutlich, dass größere  $l$  in (6.3) kleinere VSR-Strukturen erfassen, die traditionell mit stärkerer Intermittenz in Verbindung gebracht werden.

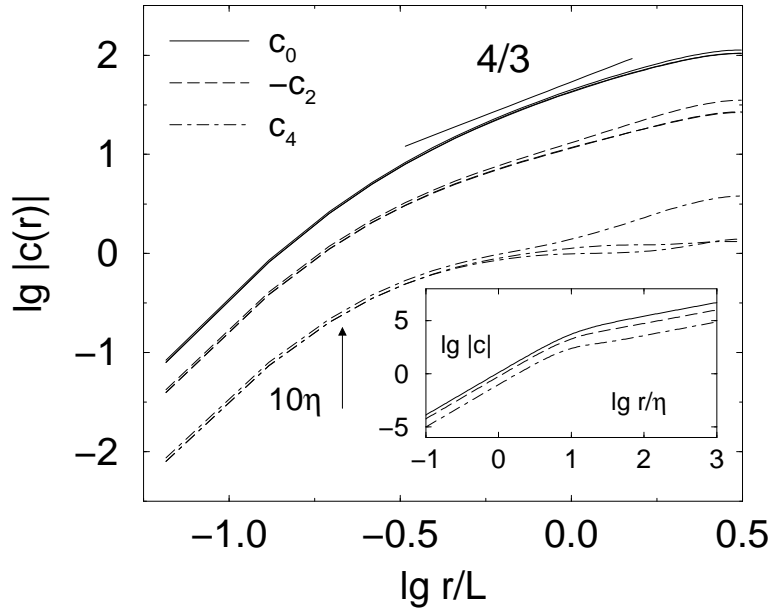


Abbildung 6.1: Strukturfunktionen vierter Ordnung  $c_{0,2,4}(r)$  in Abhängigkeit von  $r$  für die 3 Raumrichtungen. Die Reynoldszahl beträgt  $Re_\lambda = 110$  auf einem  $96^3$ -Gitter. Die Mittelungszeit von 120 Turnovers reicht nicht aus, damit  $c_4(r)$  auf großen Skalen konvergiert. In der kleinen Abbildung wurde  $c_{0,2,4}(r)$  (von oben nach unten) ausgehend von der Batchelor-Parametrisierung (6.7) berechnet. Man erkennt die unterschiedlichen Größenordnungen und das ausgeprägte Übergangsverhalten der verschiedenen irreduziblen Amplituden. Die lokale Steigung von  $\log_{10} c_4(r)$  über  $\log_{10} r$  in der Nähe des Übergangs ist nicht monoton. Wie vorausgesetzt sind die ISR-Skalenexponenten alle gleich.

Es werden nun mit der ESS-Methode präzisere Aussagen gemacht. Abbildung 6.2 enthält eine kompensierte ESS-Darstellung  $D_4^i/(D_2^i)^2$  über  $D_2^i$  mit  $i = L, T, M$ . Zusätzlich wurde  $d_4^l/(d_2^l)^2$  über  $d_2^l$  mit  $l = 0, 2$  aufgetragen. Für  $l = 0$  sieht man ein ESS-Verhalten von  $r \approx 10\eta$  bis  $r \approx L$ , was dem gewohnten ESS-Verhalten der longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen entspricht. Für  $l = 2$  ergibt sich ESS zu großen Skalen hin ab  $r \geq 50\eta$ , aber kein ESS hin zu kleinen Skalen  $r < 50\eta$ . Stattdessen gibt es einen Buckel in der Kurve  $c_2/a_2^2$  über  $a_2$  bei  $r \approx 35\eta$ , welcher auch für längere Mittelungszeiten nicht verschwindet. Er bleibt auch bestehen, wenn man einen anderen Antrieb auf großen Skalen verwendet sowie viel längerer Mittelungszeit bei kleinerer Reynoldszahl.

### 6.3 Batchelor-Parametrisierung

Auf den ersten Blick ist das Auftreten des Buckels sehr überraschend. Man kann ihn jedoch als Übergangseffekt vom VSR in den ISR interpretieren. Bis jetzt wurde er in den ESS-Darstellungen von longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen nicht beobachtet, da beide vom Beitrag  $d_n^0$ , der ESS zeigt, dominiert werden.

Um diese Interpretation weiter zu stützen, wird  $d_n^0(r)$  mittels der Batchelor-

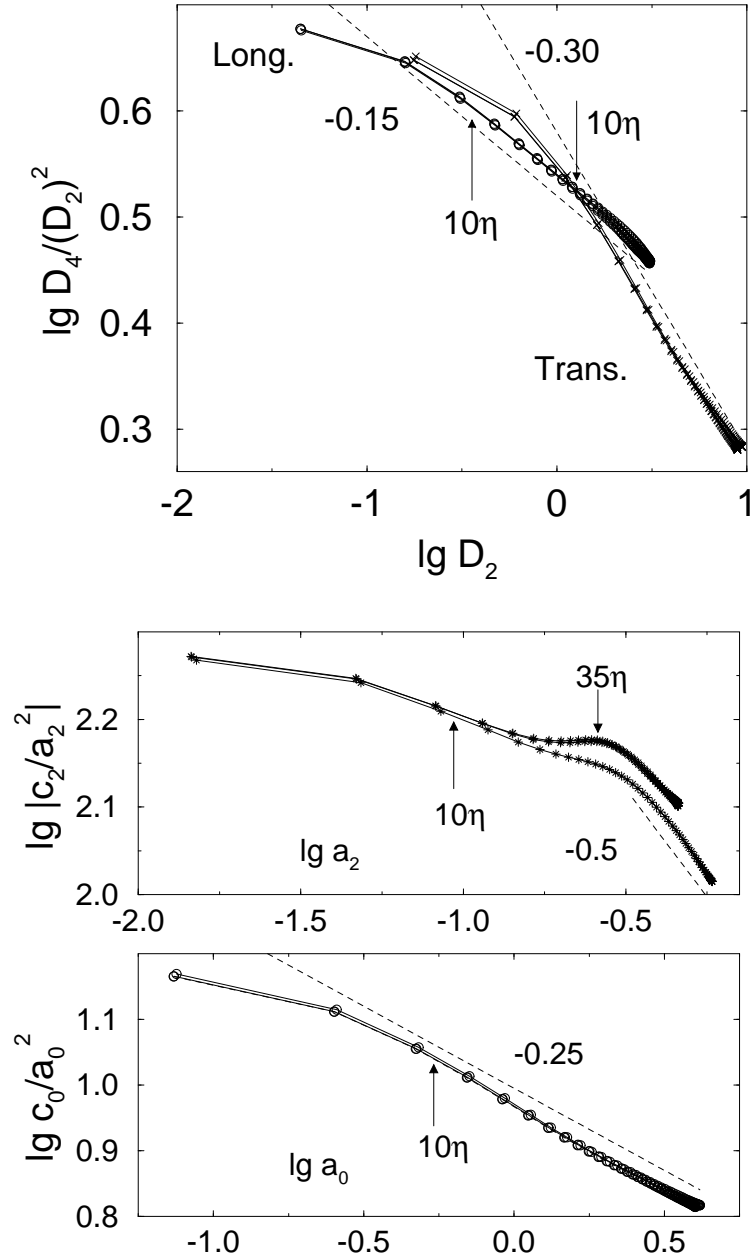


Abbildung 6.2: Kompensierte ESS-Auftragungen für Strukturfunktionen vierter gegenüber Strukturfunktionen zweiter Ordnung für verschiedene Raumrichtungen. Die Steigung ergibt den ISR-Skalenexponenten  $\rho_i = (\zeta_4^i - 2\zeta_2^i)/\zeta_2^i$ . Die Auftragung  $c_2/a_2^2$  über  $a_2$  zeigt einen ausgeprägten Buckel bei etwa  $35\eta$  für alle drei Raumrichtungen, der leicht unterschiedlich entwickelt ist. Eine mögliche Ursache ist die unvermeidbare Anisotropie oder die vielleicht zu kurze Mittelungszeit. Die Konvergenz ist ein viel geringeres Problem in der ESS-Auftragung  $c_0/a_0^2$  über  $a_0$  und auch in den ESS-Auftragungen der longitudinalen und transversalen Strukturfunktionen.

Parametrisierung [1] dargestellt:

$$d_n^0(r) \propto D_n^M(r) \propto r^n \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{(-n+\zeta_n)/2}, \quad (6.7)$$

mit  $n = 2, 4$ . Für die folgende anschauliche Rechnung wird  $r_c = 10\eta$  und  $\zeta_2 = 0.70$ ,  $\zeta_4 = 1.28$  gesetzt. Die  $\zeta$ -Werte stammen dabei aus dem She-Leveque-Modell. Aus der Inkompressibilitätsbedingung folgt

$$D_2^L(r) = \frac{1}{r^3} \int_0^r D_2^M(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}, \quad (6.8)$$

und mit Hilfe von (6.4) ergeben sich alle anderen Strukturfunktionen zweiter Ordnung. Eine analoge Beziehung für die Momente vierter Ordnung existiert nicht. Man kann jedoch mit einigen Schliessungsannahmen alle Strukturfunktionen vierter Ordnung aus  $D_4^L(r)$  berechnen [75]. Die resultierenden Beziehungen weisen keine allgemeine Gültigkeit auf; insbesondere steht ihre Aussage, dass alle Strukturfunktionen vierter Ordnung gleiches Skalenverhalten im Inertialbereich zeigen, im direkten Widerspruch zu den Ergebnissen dieser Arbeit. Um jedoch Übergangseffekte zu demonstrieren, bei denen die unterschiedliche Intermitenz im Inertialbereich vernachlässigt werden kann, ist eine Anwendung der Gleichungen (2a) bis (2c) aus [75] sinnvoll. Aus diesen kann man eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $D_{1111} = D_4^L$  ableiten

$$5D_4^L + \frac{11}{6}r \frac{d}{dr} D_4^L + \frac{1}{6}r^2 \frac{d^2}{dr^2} D_4^L = D_4^M(r) \quad (6.9)$$

und dann für ein mittels (6.7) gegebenes  $D_4^M(r) = \sqrt{5}d_4^0(r)$  numerisch lösen. Aus [75] folgt

$$D_{1122}(r) = \frac{1}{3}D_4^L + \frac{r}{12} \frac{d}{dr} D_4^L, \quad (6.10)$$

$$D_{2222}(r) = D_4^L + \frac{9}{16}r \frac{d}{dr} D_4^L + \frac{1}{16}r^2 \frac{d^2}{dr^2} D_4^L. \quad (6.11)$$

Über die Gleichungen (6.5) sowie (6.6) ergeben sich alle anderen Momente vierter Ordnung. Die daraus resultierenden kompensierten ESS-Darstellungen sind in Abbildung 6.3 zu sehen. In der Tat existiert in der Auftragung  $c_2/a_2^2$  über  $a_2$  analog zur numerischen Simulation ein Buckel im VSR-ISR-Übergangsbereich. Alle anderen gezeigten ESS-Auftragungen sind von  $D_4^M = \sqrt{5}c_0$  und  $D_2^M = 3a_0$  dominiert, und zeigen deshalb genau wie  $c_0$  über  $a_0$  ein ESS-Verhalten.

Im folgenden werden die numerischen Ergebnisse für die ESS-Skalenexponenten  $\rho_i = (\zeta_4^i - 2\zeta_2^i)/\zeta_2^i$ ,  $i = L, T, M$  bzw.  $i = 0, 2$  betrachtet (siehe Abbildung 6.2). Die Abweichung der  $\rho_i$  von 0 charakterisiert den Grad der Intermitenz des dazugehörigen Moments. Es ergibt sich  $\rho_L = -0.15$ ,  $\rho_T = -0.30$  und  $\rho_M = \rho_0 = -0.25$ ,  $\rho_2 = -0.5$ . Dies zeigt, dass der Grad der Intermitenz in den  $d_n^l$  mit größerem  $l$  zunimmt. Der entsprechende Wert aus dem She-Leveque-Modell ist  $\rho = -0.16$ .

Weiterhin wurden Auftragungen vom Typ  $d_4^l/(d_2^{l'})^2$  über  $d_2^{l'}$  mit  $l \neq l'$  durchgeführt. Dabei war kein ESS-Skalenverhalten festzustellen.

Aus der Aussage, dass sowohl die  $D_4^{L,T,M}$  als auch die  $d_4^{0,2,4}$  ein reines Skalenverhalten im Inertialbereich aufweisen, ergibt sich ein Widerspruch, sobald die Exponenten für unterschiedliches  $l$  ungleich sind. Folgt man dem Argument von L'vov et al. [29], nämlich dass die  $d_n^l$  die grundlegenden Strukturfunktionen sind, und nutzt

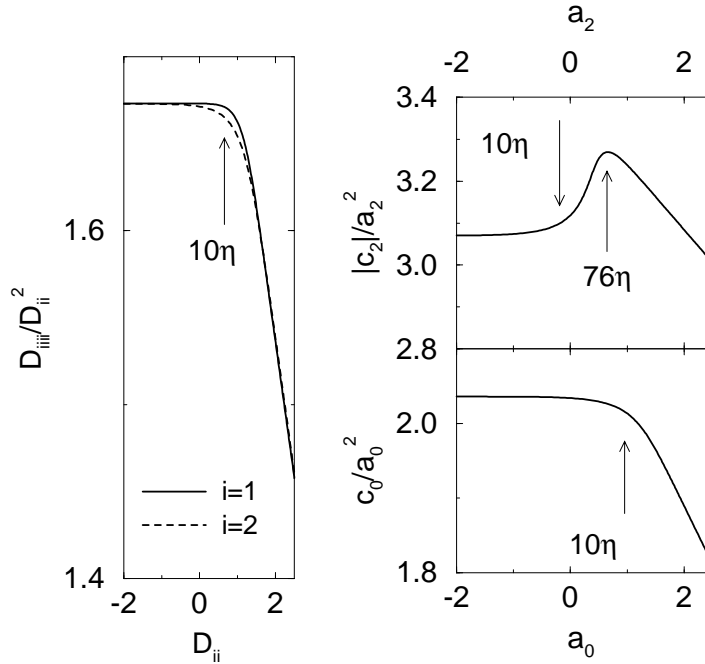


Abbildung 6.3: Kompensierte ESS-Auftragungen, die aus der Batchelor-Parametrisierung (6.7) und Gleichung (2) aus [75] stammen. Die Kurve  $c_2/a_2^2$  über  $a_2$  weist einen Buckel am VSR-ISR-Übergang auf. Die Übereinstimmung der ISR-Skalenexponenten  $\rho_i$  ist eine triviale Konsequenz der Annahmen aus [75] und gilt nicht für reale Daten.

dann Gleichung (6.5) sowie die Inkompressibilitätsbedingung aus, so kann man die Quotienten  $D_4^{L,T}/(D_2^{L,T})^2$  als Summe von Quotienten der  $d_n^l$  schreiben:

$$\frac{D_4^L}{(D_2^L)^2} \propto \frac{c_0}{a_0^2} + 2\sqrt{\frac{5}{7}} \frac{c_2}{a_0^2} + \sqrt{\frac{8}{7}} \frac{c_4}{a_0^2}, \quad (6.12)$$

$$\frac{D_4^T}{(D_2^T)^2} \propto \frac{c_0}{a_0^2} - \sqrt{\frac{5}{7}} \frac{c_2}{a_0^2} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{7}} \frac{c_4}{a_0^2}. \quad (6.13)$$

Dabei ist der jeweils erste Term führend, wie aus den numerischen Daten entnommen werden kann (siehe Abbildung 6.1). Er repräsentiert das Skalenverhalten der vollen Strukturfunktion  $D_n^M(r)$ . Im ersten und auch größeren Korrekturterm kann man die Näherung  $a_0 \approx 11a_2$  machen. Diese resultiert aus  $\zeta_2 \approx 2/3$  und der Inkompressibilitätsbedingung. Damit bleiben nur Quotienten übrig, deren Skalenverhalten sich aus den ESS-Darstellung in Abbildung 6.2 bestimmen lassen. Dabei trägt der  $c_4$ -Term für große  $r$  kaum bei. Innerhalb dieser Approximation kann man das qualitative Verhalten der Kurven in Abbildung 6.2 oben mittels der Gleichungen (6.12) und (6.13) verstehen: Da  $c_2(r) < 0$  ist, erhält man für  $D_4^L/(D_2^L)^2$  einen negativen Korrekturterm  $c_2/a_2^2$  zum führenden Term  $c_0/a_0^2$  und damit eine geringere Steigung in der ESS-Darstellung, also  $\rho_L = -0.15$ . Dagegen ist für  $D_4^T/(D_2^T)^2$  der erste Korrekturterm positiv, was eine größere Steigung  $\rho_T = -0.30$  in der ESS-Darstellung ergibt.

Zum Vergleich erhält man aus dem führenden Term  $\rho_0 = \rho_M = -0.25$ . Ebenfalls kann aus den Gleichungen (6.12) und (6.13) entnommen werden, dass die Korrektur zu  $\rho_0 = -0.25$  zweimal so groß für die longitudinale Strukturfunktion wie für die transversale Strukturfunktion ist.

Im folgenden wird über die Gleichungen (6.12) und (6.13) abgeschätzt, wie groß die Reynoldszahl sein muss, damit zwei unterschiedliche ISR-Skalenregimes in den herkömmlichen Strukturfunktionen beobachtet werden können. Dazu werden die Skalengesetze

$$\frac{c_i}{a_i^2}(r) = \frac{c_i}{a_i^2}(L) \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta_2 \rho_i}; \quad i = 0, 2 \quad (6.14)$$

in (6.12) und (6.13) eingesetzt und es werden die numerischen Werte aus der ESS-Auftragung 6.2 bei  $r = L$ ,  $c_0/a_0^2 \approx 6$  und  $c_2/a_2^2 \approx -100$  verwendet:

$$r^{\zeta_2 \rho_L} \propto \frac{D_4^L}{(D_2^L)^2} \propto r^{\zeta_2 \rho_0} \left(1 - \alpha \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta_2(\rho_2 - \rho_0)} + c_{4\text{-corr.}}\right), \quad (6.15)$$

$$r^{\zeta_2 \rho_T} \propto \frac{D_4^T}{(D_2^T)^2} \propto r^{\zeta_2 \rho_0} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta_2(\rho_2 - \rho_0)} + c_{4\text{-corr.}}\right). \quad (6.16)$$

Es ist  $\alpha \approx 0.2$ ,  $\zeta_2(\rho_2 - \rho_0) = \frac{2}{3}(-0.5 + 0.25) \approx -0.17$ . Wenn  $r$  klein genug ist, dann kann der zweite Term in (6.16) den ersten dominieren, und für hinreichend kleine  $r$  ist der dritte Term nicht zu vernachlässigen. Infolgedessen zeigt  $D_4^T/(D_2^T)^2$  mehrere unterschiedliche Skalenregimes. In Gleichung (6.15) ist die Situation noch komplizierter, da der zweite Term negatives Vorzeichen hat und die linke Seite positiv definit ist. In Gleichung (6.16) sollte der Quotient  $L/r = (2/\alpha)^{1/0.17} \approx 10^6$  sein, damit der zweite Term den ersten dominiert. Mit  $r = \eta$  kann man über Gleichung (3.7) eine Reynoldszahl  $Re \approx 10^8$  abschätzen. Dieser Wert ist in heutigen Experimenten kaum zu erreichen. Er hängt natürlich stark ab von der Differenz  $\rho_2 - \rho_0$ , die bei kleinen Reynoldszahlen nur mit begrenzter Genauigkeit bestimmt werden kann.

Setzt man die Gültigkeit der Vermutung von L'vov et al. [29] voraus, so sollten die Skalenexponenten der Strukturfunktionen  $D_n^{L,T}(r)$  oder ihre ESS-Skalenexponenten eine leichte Abhängigkeit von der Reynoldszahl aufweisen, während die Skalenexponenten der irreduziblen Objekte  $d_n^l(r)$  oder deren ESS-Exponenten (aus Auftragungen  $|d_n^l(r)|$  über  $|d_m^l(r)|$  bestimmt) sehr wohl universell sind, d.h. unabhängig von der Reynoldszahl sind.

Dieses Kapitel soll das Interesse an der Messung derartiger Exponenten als Funktion von  $Re$  für sehr hohe Reynoldszahlen anregen, damit entschieden werden kann, ob die herkömmlichen Strukturfunktionen  $D_n^{L,T}(r)$  oder die irreduziblen Strukturfunktionen  $d_n^l(r)$  die grundlegenden Objekte sind.



---

## 7 Mehrskalengkorrationsfunktionen

---

### 7.1 Grundlagen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die statistischen Eigenschaften der Geschwindigkeitsdifferenz von zwei Punkten  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  untersucht,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (7.1)$$

Jetzt sollen Vielpunkt-korrelationen näher betrachtet werden. Diese sind folgendermaßen definiert

$$\mathcal{F}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2; \dots; \mathbf{x}_p, \mathbf{x}'_p) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) \mathbf{v}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) \cdots \mathbf{v}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}'_p) \rangle, \quad (7.2)$$

wobei alle Koordinaten  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i$  unterschiedlich sind. Die für alle Geschwindigkeiten gleiche Zeit  $t$  wird nicht explizit vermerkt. Man nimmt an, dass die Korrelationsfunktion  $\mathcal{F}_p$  eine homogene Funktion aller ihrer Koordinaten ist

$$\mathcal{F}_p(\lambda \mathbf{x}_1, \lambda \mathbf{x}'_1; \dots; \lambda \mathbf{x}_p, \lambda \mathbf{x}'_p) = \lambda^{\zeta_p} \mathcal{F}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \dots; \mathbf{x}_p, \mathbf{x}'_p), \quad (7.3)$$

mit einem Skalenexponenten  $\zeta_p$ , der identisch ist mit dem für die herkömmlichen Strukturfunktionen  $D_p^M(R)$  derselben Ordnung  $p$ . Von L'vov et al. [78] wurde untersucht, welche Eigenschaften sich ergeben, wenn einige der Abstände  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i|$  viel kleiner werden als alle anderen. Man betrachtet z.B. den Fall, dass  $m$  Koordinatenpaare  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \dots; \mathbf{x}_m, \mathbf{x}'_m$  von insgesamt  $p$  Geschwindigkeitsdifferenzen, also  $m \leq p$ , die typischen Abstände  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i| \approx r$  ( $i \leq m$ ) aufweisen und alle anderen Abstände von der Größenordnung  $R$  sind, mit  $\eta \ll r \ll R \ll L$ . Dann besagen die sogenannten Fusion Rules [78], dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \dots; \mathbf{x}_p, \mathbf{x}'_p) = \\ \mathcal{F}'_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \dots; \mathbf{x}_m, \mathbf{x}'_m) \psi_{p,m}(\mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}'_{m+1}; \dots; \mathbf{x}_p, \mathbf{x}'_p), \end{aligned} \quad (7.4)$$

wobei  $\mathcal{F}'_m$  ein Tensor vom Rang  $m$  ist, dem die ersten  $m$  Tensorindizes von  $\mathcal{F}_p$  zugeordnet sind, und der einen Homogenitätsexponenten  $\zeta_m$  hat. Der Tensor  $\psi_{p,m}$  mit dem Rang  $p-m$  ist eine homogene Funktion mit dem Skalenexponenten  $\zeta_p - \zeta_m$ , zu der die übrigen  $p-m$  Indizes von  $\mathcal{F}_p$  gehören. Die Bezeichnung „Fusion“ soll andeuten, dass ein oder mehrere zunächst sehr verschiedene  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i$  näher geführt, fusioniert werden sollen,  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i| \rightarrow 0$ .

Betrachtet man in homogener, isotroper Turbulenz nur longitudinale Geschwindigkeitsdifferenzen  $v(x, x') = u(x') - u(x)$  mit  $u(x) := u_1(x\mathbf{e}_1)$  und den Abkürzungen  $v_R \equiv v(x, x+R)$ ,  $S_n(R) = \langle v_R^n \rangle$ , so schreibt sich Gleichung (7.4) für den Fall  $\eta \ll r \ll R \ll L$  als [79]

$$\langle v_r^m v_R^n \rangle \sim S_m(r) \frac{S_{m+n}(R)}{S_m(R)}. \quad (7.5)$$

Darüberhinaus wird in [77] vorausgesagt, dass für  $r \rightarrow 0$  die Korrelation  $\langle v_r v_R^{n-1} \rangle$  folgende Form annimmt:

$$\langle v_r v_R^{n-1} \rangle \sim r^2 \frac{S_{n+1}(R)}{\nu R}. \quad (7.6)$$

Hier sind nicht mehr wie in Gleichung (7.5) sowohl  $R$  als auch  $r$  ( $r \ll R$ ) größer als  $\eta$ , sondern  $r$  bereits kleiner als die innere Turbulenzlänge  $\eta$ , d.h.  $r \ll \eta \ll R \ll L$ .

## 7.2 Korrelationsfunktionen mit Gradienten

Fairhall et al. [79] betrachten eine Familie von longitudinalen Korrelationsfunktionen  $J_n(\rho, R)$ , die folgendermaßen definiert sind,

$$J_n(\rho, R) = \langle \Delta_\rho u(x) [u(x+R) - u(x)]^{n-1} \rangle, \quad (7.7)$$

wobei  $\Delta_\rho u(x)$  die durch endliche Differenzen approximierete zweite Ableitung nach  $x$  bedeutet:

$$\Delta_\rho u(x) = (u(x+\rho) - 2u(x) + u(x-\rho))/\rho^2. \quad (7.8)$$

Das Interesse am Verhalten dieser Funktionen rührt daher, dass  $J_n$  im Limes  $\rho \rightarrow 0$  Bestandteil einer Bewegungsgleichung für die longitudinalen Strukturfunktionen ist [79]:

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} + \mathcal{D}_n(R) = \nu J_n(R). \quad (7.9)$$

Fairhall et al. verwenden nun die im vorigen Abschnitt angegebenen Fusion Rules, um über  $J_n(\rho, R)$  Aussagen zu machen. Ihre Vorgehensweise wird in diesem Abschnitt beschrieben und anschließend mit numerischen Ergebnissen verglichen.

Man setzt zunächst Gleichung (7.8) in (7.7) ein,

$$J_n(\rho, R) = \frac{1}{\rho^2} \langle [u(x+\rho) + u(x-\rho) - 2u(x)] [u(x+R) - u(x)] v_R^{n-2} \rangle \quad (7.10)$$

und multipliziert die beiden Klammern aus. Im Fall  $\rho \ll R$  faktorisieren die Korrelationen  $\langle u(x)u(x+R)v_R^{n-2} \rangle$  und  $\langle u(x \pm \rho)u(x+R)v_R^{n-2} \rangle$  und ergeben 0. Damit erhält man

$$J_n(\rho, R) = \frac{1}{\rho^2} \langle [-u(x+\rho)u(x) - u(x-\rho)u(x) + 2u^2(x)] v_R^{n-2} \rangle. \quad (7.11)$$

Die Ausnutzung der Homogenität der Strömung liefert

$$J_n(\rho, R) = \frac{1}{\rho^2} \langle [u(x+\rho) - u(x)]^2 v_R^{n-2} \rangle = \frac{1}{\rho^2} \langle v_\rho^2 v_R^{n-2} \rangle. \quad (7.12)$$

Jetzt kann man die Fusion Rule (7.5) auf (7.12) anwenden und erhält für  $\eta \ll \rho \ll R \ll L$  das erste Ergebnis

$$J_n(\rho, R) = C_n \frac{S_2(\rho) S_n(R)}{\rho^2 S_2(R)}. \quad (7.13)$$

Für den Fall, dass  $\rho$  gegen Null geht, aber  $R$  im Inertialbereich liegt, d.h.  $\rho \ll \eta \ll R \ll L$ , schreibt man Gleichung (7.7) um in

$$J_n(\rho, R) = \frac{1}{\rho^2} \langle (v_\rho + v_{-\rho}) v_R^{n-1} \rangle, \quad (7.14)$$

und wendet die Gleichung (7.6) darauf an. Das führt zum zweiten Ergebnis:

$$J_n(\rho, R) = \tilde{C}_n S_{n+1}(R) / S_3(R). \quad (7.15)$$

Dabei wurde benutzt, dass  $S_3(R) \sim R$  für  $R \in \text{ISR}$  gilt. Man kann für Gleichung (7.15) auch folgendes Argument geben: Sei  $\rho$  noch im ISR, dann kann man Gleichung (7.13) verwenden. Die  $\rho$ -Abhängigkeit ist dann

$$\frac{S_2(\rho)}{\rho^2} \sim \frac{\rho^{\zeta_2}}{\rho^2} = \rho^{\zeta_2-2}. \quad (7.16)$$

Wenn nun  $\rho$  in den VSR wandert, so ersetzt man  $\rho$  durch die viskose Skala  $\eta_n$  der Korrelationsfunktion  $\mathcal{F}_n$ , mit  $\eta_n = \eta(R/L)^{\alpha_n}$  und  $\alpha_n = (\zeta_n + \zeta_3 - \zeta_{n+1} - \zeta_2)/(2 - \zeta_2)$  [78]. Damit ergibt sich für  $J_n$

$$J_n(\rho, R) \sim R^{\alpha_2(\zeta_2-2)} R^{\zeta_n - \zeta_2} \sim R^{\zeta_{n+1} - \zeta_3}, \quad (7.17)$$

was man als Gleichung (7.15) schreiben kann.

Für den Fall  $n = 2$  kann man ohne Ausnutzung der Fusion Rules und unter alleiniger Verwendung der Homogenität der Strömung  $J_n(\rho, R)$  aus Gleichung (7.7) umformen in

$$J_2(\rho, R) = \frac{S_2(\rho)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left( S_2(R) - \frac{1}{2} (S_2(R + \rho) + S_2(R - \rho)) \right). \quad (7.18)$$

Wenn  $\rho \rightarrow 0$  geht, kann man die auftretenden  $S_2$  bzgl. ihrer  $\rho$ -Abhängigkeit bis zur zweiten Ordnung in  $\rho$  entwickeln und erhält

$$J_2(\rho \rightarrow 0, R) = \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dR^2} S_2(R), \quad (7.19)$$

wobei man  $S_2(\rho)/\rho^2$  durch  $\langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle = \epsilon/(15\nu)$  ersetzt hat. Folgende Schlussfolgerungen kann man jetzt ziehen: Die Voraussage (7.15) ist für  $n = 2$  nur dann kompatibel mit Gleichung (7.19), wenn  $\tilde{C}_2 = \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle$  ist und wenn der zweite Term in (7.19) verschwindet, was z.B. gilt, wenn  $S_2(R)$  für große  $R \approx L$  konstant wird. Vergleicht man die Voraussage (7.13) mit der Gleichung (7.18), so muss für eine Übereinstimmung  $C_2 = 1$  sein und der zweite Term in (7.18) verschwinden. Dies ist der Fall, wenn  $S_2(R + \rho) = S_2(R - \rho)$  gilt, also wenn  $R \pm \rho$  so groß ist, dass  $S_2$  konstant wird.

Für beliebiges  $n$  und  $\rho \rightarrow 0$  wurde von Benzi et al. [80] unter Zuhilfenahme eines GESS-Ansatzes ohne Verwendung der Fusion Rules die allgemeine Gleichung

$$J_2(\rho \rightarrow 0, R) = C_n \langle (\partial_1 u_1)^2 \rangle \frac{S_n(R)}{S_2(R)} - \frac{1}{n} \frac{d^2}{dR^2} S_n(R) \quad (7.20)$$

gefunden. Der Fall  $n = 2$  ergibt Gleichung (7.19). Sehr bemerkenswert ist das Verhalten für große  $R \approx L$ , wenn der zweite Term in Gleichung (7.20) vernachlässigt werden kann. Denn dann geht diese Gleichung über in die Voraussage (7.13) und nicht in die für  $\rho \in \text{VSR}$  vorhergesagte Beziehung (7.15).

Die Beziehung (7.13) ist in [78] experimentell bestätigt<sup>1</sup> worden. Da die Daten für den viskosen Bereich jedoch unzureichend waren, konnte die Gültigkeit der Gleichung (7.15) nicht untersucht werden.

Im folgenden Abschnitt werden nun die Voraussagen der Gleichungen (7.13) und (7.15) mit den Ergebnissen aus einer numerischen Simulation auf einem  $60^3$ -Gitter bei einer Reynoldszahl  $Re_\lambda = 70$  verglichen.

### 7.3 Kompensierte Darstellungen

Zunächst werden in Anlehnung an die Auswertungen in [78] die Quotienten  $J_n/J_2$  betrachtet, die sich aus den Gleichungen (7.13) und (7.15) ergeben als

$$\frac{J_n(\rho, R)}{J_2(\rho, R)} = \frac{C_n S_n(R)}{C_2 S_2(R)}, \quad \rho \gg \eta, \quad (7.21)$$

$$\frac{J_n(\rho, R)}{J_2(\rho, R)} = \frac{\tilde{C}_n S_{n+1}(R)}{\tilde{C}_2 S_3(R)}, \quad \rho \ll \eta. \quad (7.22)$$

Dabei soll  $R$  groß gegenüber sowohl  $\rho$  als auch  $\eta$  sein. Wenn man also  $J_n/J_2$  durch  $S_n(R)/S_2(R)$  für  $\rho$  im ISR teilt bzw. durch  $S_{n+1}(R)/S_3(R)$  für  $\rho$  im VSR, so sollte man bei einer Auftragung über  $R$  im Inertialbereich einen konstanten Verlauf sehen können, vorausgesetzt die Fusion Rules sind gültig. In den Abbildungen 7.1 und 7.2 sind  $J_4/J_2$  bzw.  $J_6/J_2$  auf obige Weise kompensiert dargestellt. Für  $\rho = 3.6\eta$  scheinen die VSR-kompensierten Kurven eher einen konstanten Verlauf im Inertialbereich zu zeigen als die ISR-kompensierten Kurven, für die größeren  $\rho$  scheint es aber umgekehrt zu sein. Man kann an dieser Art von Auftragung nicht genau entscheiden, wann welche Vorhersage besser gilt.

### 7.4 Bedingte Mittelwerte

Eine deutlich bessere Methode, die Vorhersagen der Fusion Rules zu überprüfen, bietet die Verwendung von bedingten Mittelwerten. Dazu schreibt man  $J_n(\rho, R)$  in der Form

$$J_n(\rho, R) = \int dv_R P_R(v_R) \langle \Delta_\rho u | v_R \rangle v_R^{n-1}. \quad (7.23)$$

Dabei ist  $\langle \Delta_\rho u | v_R \rangle$  der Mittelwert von  $\Delta_\rho u$  unter der Bedingung, dass die Geschwindigkeitsdifferenz gerade  $v_R$  ist, also ein bedingter Mittelwert. (7.23) ist definitionsgemäß richtig. Der bedingte Mittelwert lässt sich seinerseits durch eine bedingte

<sup>1</sup>In der zitierten Arbeit enthalten die  $J_n(\rho, R)$  fälschlicherweise ein  $n/2$  zuviel, und die  $S_n$  sind mit Betragstrichen definiert,  $S_n(R) = \langle |v_R|^n \rangle$ .

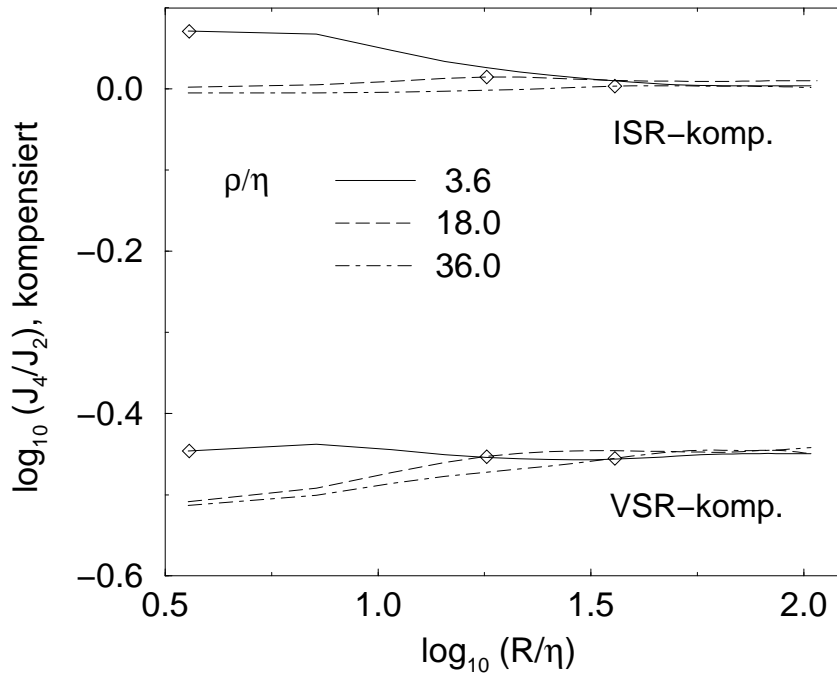


Abbildung 7.1: Doppeltlogarithmische Darstellung der kompensierten Funktion  $J_4(\rho, R)/J_2(\rho, R)$  in Abhängigkeit von  $R$  für  $\rho/\eta = 3.6, 18$  und  $36$ , dargestellt durch durchgezogene und gestrichelte Linien sowie Strichpunkte. Die Daten sind im oberen Teil der Grafik durch die Fusion Rule-Vorhersage im Inertialbereich  $S_4(R)/S_2(R)$  und im unteren Teil durch die des viskosen Bereichs  $S_5(R)/S_3(R)$  kompensiert, d.h. geteilt. Die Rauten markieren die Stellen  $R = \rho$ , d.h. erst rechts davon könnte man mit den Fusion Rule - Folgerungen (7.13) und (7.15) dem Anspruch nach vergleichen.

Wahrscheinlichkeit darstellen:

$$\langle \Delta_\rho u | v_R \rangle = \int P_{\rho,R}(a | v_R) a da = \int \frac{P_{\rho,R}(a, v_R)}{P_R(v_R)} a da, \quad \text{mit } a \equiv \Delta_\rho u. \quad (7.24)$$

Dabei bedeuten  $P_{\rho,R}(\Delta_\rho u | v_R)$  die auf  $v_R$  bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für  $\Delta_\rho u$ ,  $P_{\rho,R}(a, v_R)$  die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für  $\Delta_\rho u$  und  $v_R$ , und  $P_R(v_R)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Geschwindigkeitsdifferenzen  $v_R$  im Abstand  $R$ .

In Abbildung 7.3 ist der bedingte Mittelwert als Funktion von  $v_R$  für zwei Werte von  $\rho$  und jeweils drei verschiedene  $R$  aus dem Inertialbereich bzw. Energieeinführungsbereich aufgetragen. Dabei ist der bedingte Mittelwert noch mit  $J_2(\rho, R)/S_2(R)$  kompensiert (geteilt), was sich im folgenden als sinnvoll herausstellen wird. Diese Kompensation ist  $R$ -abhängig; aber für jede der Kurven ist  $R$  fest gewählt.  $v_R$  sind die bei feststehendem  $R$  (numerisch) gemessenen  $v$ -Fluktuations-Werte. Man erkennt für nicht zu große  $v_R$  ein lineares Verhalten bezüglich der Variablen  $v_R$ . Eine gute analytische Approximation des bedingten Mittelwerts, für den wegen der graphischen Ergebnisse ein ungerades Verhalten angenommen wird, ist daher

$$\langle \Delta_\rho u | v_R \rangle = f(\rho, R)v_R + g(\rho, R)v_R^3. \quad (7.25)$$

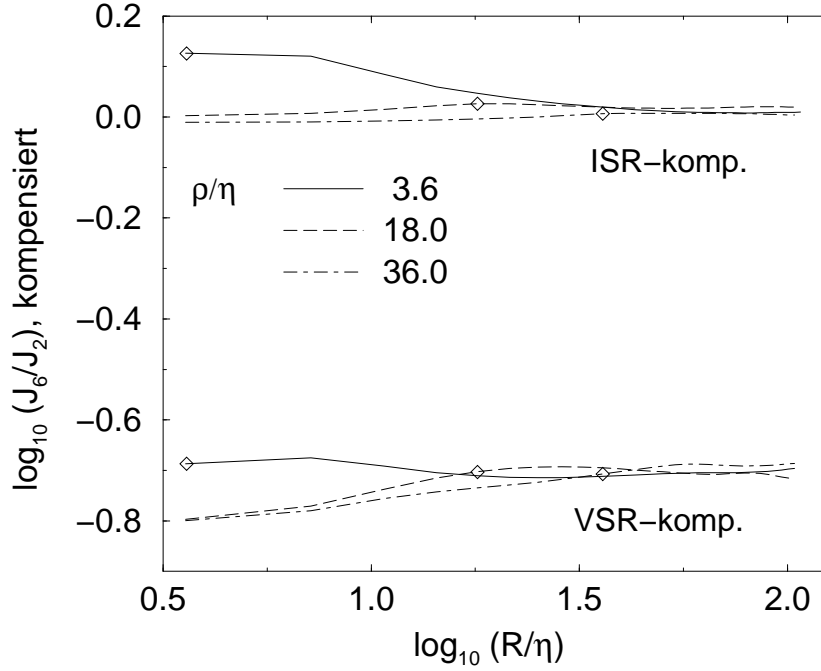


Abbildung 7.2: Doppeltlogarithmische Darstellung der kompensierten Funktion  $J_6(\rho, R)/J_2(\rho, R)$  in Abhängigkeit von  $R$  für  $\rho/\eta = 3.6, 18$  und  $36$ , dargestellt durch durchgezogene und gestrichelte Linien sowie Strichpunkte. Die Daten sind im oberen Teil der Grafik durch die Fusion Rule-Vorhersage im Inertialbereich  $S_6(R)/S_2(R)$  und im unteren Teil durch die des viskosen Bereichs  $S_7(R)/S_3(R)$  kompensiert, also geteilt. Die Rauten markieren die Stellen  $R = \rho$ .

Damit ergibt sich für die  $J_n$  mittels Gleichung (7.23)

$$J_n(\rho, R) = f(\rho, R)S_n(R) + g(\rho, R)S_{n+2}(R). \quad (7.26)$$

Für den Fall, dass  $g$  vernachlässigbar ist, erhält man das Ergebnis

$$J_n(\rho, R) = J_2(\rho, R) \frac{S_n(R)}{S_2(R)}. \quad (7.27)$$

Es ist kompatibel mit Gleichung (7.13) und bedeutet  $C_n = 1$ . Wenn der bedingte Mittelwert linear in  $v_R$  ist, gilt also automatisch die Fusion Rule (7.13). Und wie Abbildung 7.3 verdeutlicht, ist für  $R$  im Inertialbereich sowohl für kleine als auch große  $\rho$  die Linearität von  $\langle \Delta_\rho u | v_R \rangle S_2(R)/J_2(\rho, R)$  bezüglich der Variablen  $v_R$  für nicht zu große  $v_R$  in der Tat gegeben, und damit (7.13). Durch die Multiplikation mit  $S_2(R)/J_2(\rho, R)$  fallen die Kurven für unterschiedliche  $R$  aufeinander, was ebenfalls mit Gleichung (7.27) in Übereinstimmung ist. Um stattdessen die Beziehung (7.15) zu gewinnen, würde man für den bedingten Mittelwert in führender Ordnung ein Verhalten proportional zu  $v_R^2$  erwarten. Dann könnte  $J_n \propto S_{n+1}(R)$  gelten. Dies kann bei den vorliegenden Daten ausgeschlossen werden.

Um zu überprüfen, wie genau die  $J_n$  aus der Entwicklung (7.25) des bedingten Mittelwerts berechnet werden können, wurde für verschiedene  $\rho$  und alle  $R$  der bedingte

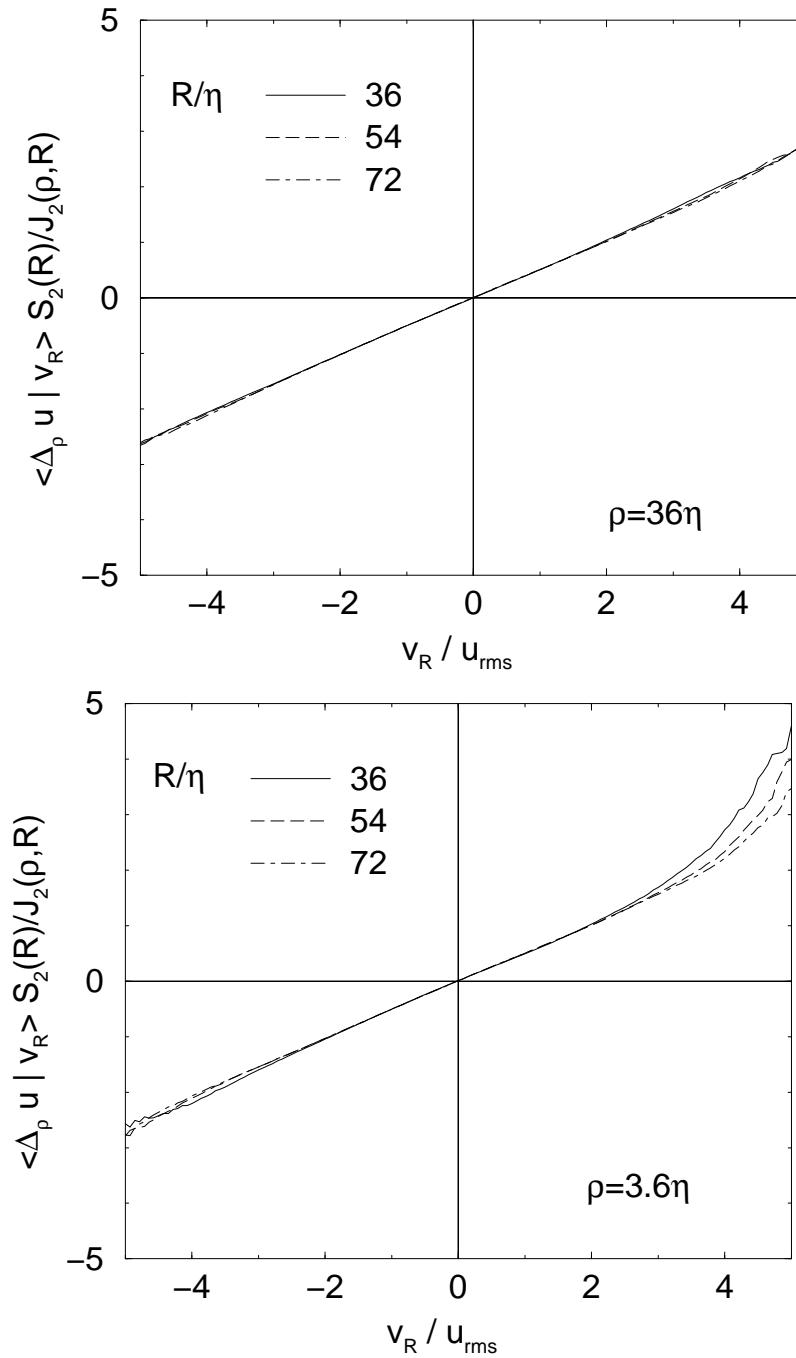


Abbildung 7.3:  $\langle \Delta_\rho u | v_R \rangle S_2(R) / J_2(\rho, R)$  für  $\rho = 36\eta$  (oben) und  $\rho = 3.6\eta$  (unten), jeweils für drei verschiedene  $R$  aus dem Inertialbereich bzw. Energieeinfütterungsbereich. Die Asymmetrie der Kurven für  $\rho = 3.6\eta$  liegt vermutlich an ungenügender Statistik bei großen  $|v_R|$ .

Mittelwert mit der Funktion (7.25) im Bereich  $|v_R| < 2u_{rms}$  gefittet, und aus den so bestimmten  $f$  und  $g$  über die Gleichung (7.26) die Funktion  $J_n(\rho, R)$  berechnet. In Abbildung 7.4 ist dies für  $n = 2$  geschehen. Man sieht, dass für  $\rho = 3.6\eta$  der lineare Term  $fS_2$  nur für große  $R \approx L$  eine gute Übereinstimmung mit  $J_n$  liefert. Die

Hinzunahme des kubischen Terms  $gS_4$  bewirkt eine gute Approximation für  $R$  ab dem Inertialbereich. Für  $R$  im viskosen Bereich ist selbst die kubische Entwicklung nicht ausreichend. Betrachtet man den Fall  $\rho = 36\eta$ , so genügt der lineare Term  $fS_2$ , um eine gute Übereinstimmung für alle  $R$  zu erzielen. Das beschriebene Verhalten für  $n = 2$  wurde für höhere Werte von  $n$  überprüft. Es überträgt sich genau so auch auf die anderen untersuchten  $n = 4$  und  $n = 6$ .

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Analyse der bedingten Mittelwerte die Gültigkeit der Vorhersage (7.13) für alle  $R$  im Inertialbereich bestätigt, und zwar unabhängig davon, ob  $\rho$  im viskosen oder Inertialbereich liegt. Die Vorhersage (7.15) für  $\rho$  im viskosen Bereich trifft für die vorliegenden numerischen Strömungsdaten nicht zu.

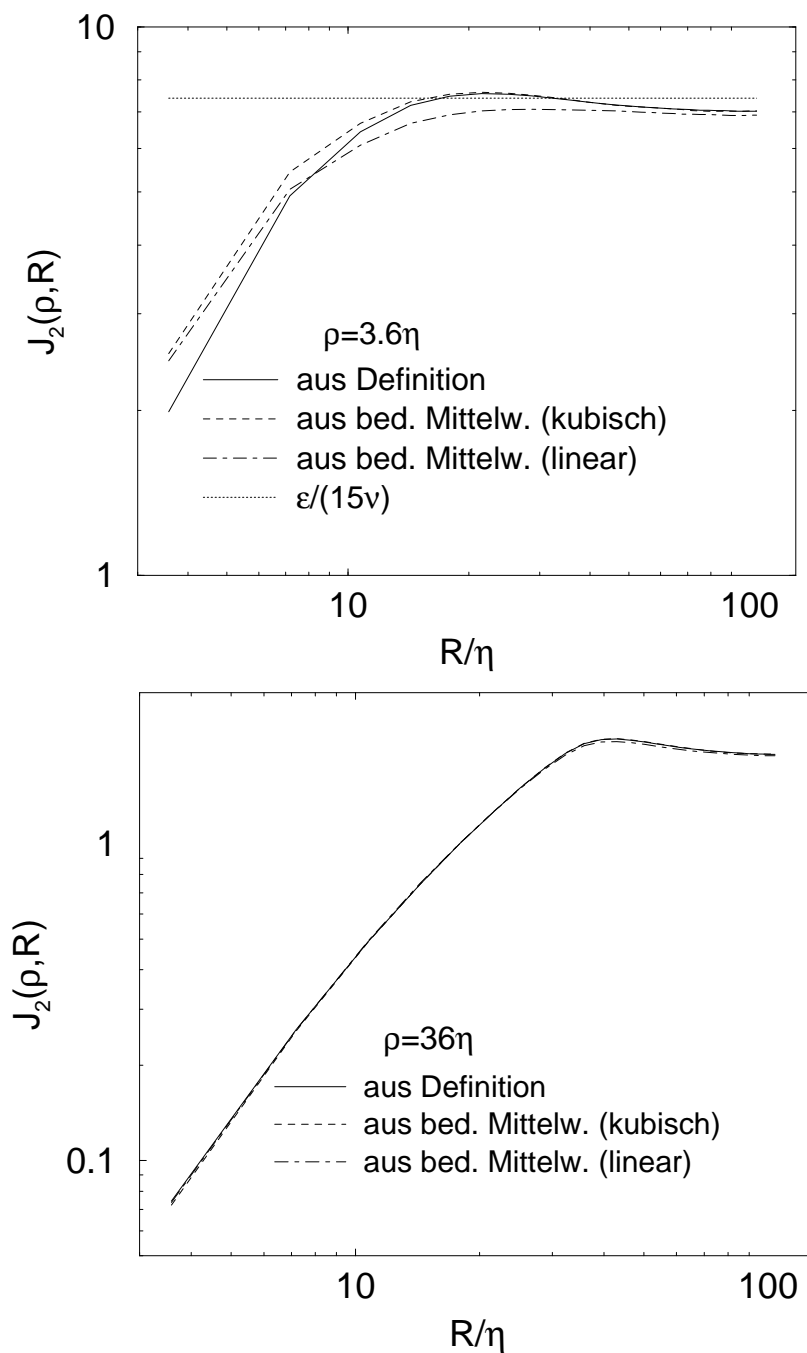


Abbildung 7.4: Vergleich der aus der Definition (7.7) berechneten Funktion  $J_2(\rho, R)$  mit den über die bedingten Mittelwerte berechneten Funktionen für  $\rho = 3.6\eta$  und  $\rho = 36\eta$ . Im oberen Bild ist der erste Term  $\langle(\partial_1 u_1)^2\rangle = \epsilon/(15\nu)$  aus Gleichung (7.19) eingezeichnet.



---

## 8 Ausblick

---

In dieser Arbeit wurden ganz verschiedene Aspekte des intermittenten Verhaltens der Geschwindigkeitsfluktuationen in einer turbulenten Strömung bei kleinen Taylor-Reynoldszahlen  $Re_\lambda \approx 110$  untersucht. Dazu gehören das Skalenverhalten der verschiedenen longitudinalen, transversalen und SO(3)-Strukturfunktionen wie auch Ausdünnungseffekte im Phasenraum (REWA) und Mehrskalenkorrelationsfunktionen. Abweichend zu realen Strömungen wurden dabei periodische Randbedingungen und eine Energieeinfütterung auf großen Skalen verwendet. Für zukünftige Arbeiten stellt sich die Frage, inwieweit sich die erhaltenen Resultate ändern, wenn man stattdessen mit realistischen Randbedingungen  $u|_{\text{Rand}} = 0$  rechnet. Wie werden sich die Intermittenzkorrekturen verhalten, wenn man für eine volle numerische Simulation mit explizitem Rand eine Modenausdünnung durchführt?

Neben der Untersuchung von Intermittenzkorrekturen wurde die bekannteste Methode zur Bestimmung derselben, nämlich ESS, numerisch und analytisch kritisch überprüft. Die Notwendigkeit der Auftragung der Strukturfunktionen gegenüber  $D_3^*(r)$  konnte gezeigt werden. Es bleibt für die Zukunft die Frage offen, warum sich nicht-universelle großskalige Effekte bei der Auftragung von Strukturfunktionen gerader Ordnung in etwa wegheben, nicht aber in ungeraden Momenten, die ohne Absolutbetrag berechnet wurden.

Es gibt also noch eine Reihe spannender und komplexer hydrodynamischer Probleme zu lösen.



---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975).
- [2] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [3] G. I. Taylor, Proc. *The spectrum of turbulence* R. Soc. London A **164**, 476 (1938).
- [4] A. N. Kolmogorov, CR. Acad. Sci. USSR. **30**, 299 (1941).
- [5] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer Verlag, Heidelberg, 1988).
- [6] A. Vincent and M. Meneguzzi, J. Fluid Mech. **225**, 1 (1991).
- [7] E. B. Gledzer, Sov. Phys. Dokl. **18**, 216 (1973).
- [8] M. Yamada and K. Ohkitani, J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 4210 (1987).
- [9] L. Kadanoff, D. Lohse, J. Wang, and R. Benzi, Phys. Fluids **7**, 617 (1995).
- [10] J. Eggers and S. Grossmann, Phys. Fluids A **3**, 1958 (1991).
- [11] S. Grossmann and D. Lohse, Z. Phys. B **89**, 11 (1992).
- [12] S. Grossmann and D. Lohse, Phys. Fluids **6**, 611 (1994).
- [13] S. Grossmann and D. Lohse, Phys. Rev. E **50**, 2784 (1994).
- [14] S. Grossmann, D. Lohse, and A. Reeh, in *Dynamical Systems and Chaos, Vol 2: Physics*, edited by S. Saito und K. Shiraiwa Y. Aizawa (World Scientific, Singapore, 1995), p. 209.
- [15] C. Uhlig and J. Eggers, Z. Phys. B **102**, 513 (1997) (1996).
- [16] A. Reeh, *Näherungslösungen der Navier-Stokes-Gleichung für turbulente Strömungen bei hohen Reynoldszahlen*, Diplomarbeit, Universität Marburg (1994).
- [17] N. Schörghofer, L. Kadanoff, and D. Lohse, Physica D **88**, 40 (1995).
- [18] L. P. Kadanoff, Physics Today **48**, 11 (1995).
- [19] E. Leveque and Z. S. She, Phys. Rev. Lett. **75**, 2690 (1995).
- [20] N. Cao, S. Chen, and Z. S. She, Phys. Rev. Lett. **76**, 3711 (1996).
- [21] S. Grossmann, D. Lohse, and A. Reeh, Phys. Fluids **9**, 3817 (1997).

- [22] S. Grossmann, D. Lohse, and A. Reeh, *Phys. Rev. E* **56**, 5473 (1997).
- [23] J. Jimenez, A. Wray, P. G. Saffman, and R. S. Rogallo, *J. Fluid Mech.* **255**, 65 (1993).
- [24] G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953).
- [25] H. Kahalerras, Y. Malecot, and Y. Gagne, in *Advance in Turbulence VI*, edited by S. Gavrilakis, L. Michiels, and P. A. Monkewitz (Kluwer Academic Publishers, New York, 1996), p. 235.
- [26] G. Ruiz Chavarria, C. Baudet, R. Benzi, and S. Ciliberto, *J. Phys. II France* **5**, 485 (1995).
- [27] A. N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962);
- [28] O. N. Boratav and R. B. Pelz, *Phys. Fluids* **9**, 1400 (1997).
- [29] V. L'vov, E. Podivilov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2050 (1997).
- [30] S. Grossmann, D. Lohse, and A. Reeh, *J. Stat. Phys.* **93**, 715 (1998).
- [31] V. L'vov and I. Procaccia, *Phys. World* **9**, 35 (1996) und die Referenzen der Originalbeiträge der Autoren darin.
- [32] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicciono, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi, *Phys. Rev. E* **48**, R29 (1993).
- [33] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, and G. R. Chavarria, *Physica D* **80**, 385 (1995).
- [34] M. Briscolini, P. Santangelo, S. Succi and R. Benzi, *Phys. Rev. E* **50**, R1745 (1994).
- [35] Roberto Benzi (priv. Mitteilung).
- [36] M. Nelkin, *Advances in Physics* **43**, 143 (1994).
- [37] Roberto Benzi (priv. Mitteilung) teilte mit, dass dies in der Tat der Fall ist für eine experimentelle Strömung in einem Bereich, in dem der Antrieb keinen Einfluss hat. Andere Autoren finden Unterschiede; z.B. J. A. Herweijer (Ph.D. thesis, University of Eindhoven, 1995) findet in einem Windtunnelexperiment  $D_3^L(r) \propto r^{1.035 \pm 0.005}$  und  $D_3^{*L}(r) \propto r^{1.055 \pm 0.005}$ .
- [38] G. Stolovitzky, K. R. Sreenivasan, and A. Juneja, *Phys. Rev. E* **48**, R3217 (1993).
- [39] L. Sirovich, L. Smith, and V. Yakhot, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 344 (1994).
- [40] G. Stolovitzky and K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. E* **48**, R33 (1993).
- [41] A. Arneodo et al., *Europhys. Lett.* **34**, 411 (1996).
- [42] F. Belin, P. Tabeling, and H. Willaime, *Physica D* **93**, 52 (1996).

- 
- [43] G. K. Batchelor, Proc. Camb. Philos. Soc. **47**, 359 (1951).
- [44] H. Effinger and S. Grossmann, Z. Phys. B **66**, 289 (1987).
- [45] D. Lohse and A. Müller-Groeling, Phys. Rev. Lett. **74**, 1747 (1995).
- [46] Ch. Meneveau, Phys. Rev. E **54**, 3657 (1996).
- [47] D. Lohse and A. Müller-Groeling, Phys. Rev. E **54**, 395 (1996).
- [48] R. Benzi, L. Biferale, S. Ciliberto, M. V. Struglia, and R. Tripiccion, Physica D **96**, 162 (1996).
- [49] K. R. Sreenivasan, Phys. Fluids **7**, 2778 (1995).
- [50] K. R. Sreenivasan, Phys. Fluids **27**, 1048 (1984).
- [51] D. Lohse, Phys. Rev. Lett. **73**, 3223 (1994).
- [52] S. Grossmann, Phys. Rev. E **51**, 6275 (1995).
- [53] G. Stolovitzky, K. R. Sreenivasan, and A. Juneja, Phys. Rev. E **52**, 3242 (1995).
- [54] A. Praskovsky and S. Oncley, Phys. Fluids A **6**, 2886 (1994).
- [55] J. Herweijer and W. van der Water, in *Advance in Turbulence V*, edited by R. Benzi (Kluwer Academic Publishers, New York, 1995), p. 210.
- [56] V. Yakhot, Phys. Rev. Lett. **69**, 769 (1992).
- [57] S. Grossmann, D. Lohse, and A. Reeh, Phys. Rev. Lett. **77**, 5369 (1996).
- [58] J. Herweijer and W. van de Water, Phys. Rev. Lett. **74**, 4651 (1995).
- [59] W. van de Water and J. A. Herweijer, Phys. Scripta **T67**, 136 (1996).
- [60] R. Camussi and R. Benzi, Phys. Fluids **9**, 257 (1997).
- [61] Z. S. She and E. Leveque, Phys. Rev. Lett. **72**, 336 (1994).
- [62] S. Chen and N. Cao, Phys. Rev. E **52**, R5757 (1995).
- [63] Z. S. She and E. S. Waymire, Phys. Rev. Lett. **74**, 262 (1995).
- [64] B. Dubrulle, Phys. Rev. Lett. **73**, 959 (1994).
- [65] R. Benzi, L. Biferale, S. Ciliberto, M. V. Struglia, and R. Tripiccion, Europhys. Lett. **32**, 709 (1995).
- [66] R. Benzi, L. Biferale, and E. Travatore, Phys. Rev. Lett. **77**, 3114 (1996).
- [67] W. van de Water and J. Herweijer, *High order structure functions of turbulence*, Preprint, Eindhoven 1996.
- [68] R. Camussi and R. Benzi, Phys. Fluids **9**, 257 (1997).
- [69] R. Camussi, D. Barbagallo, G. Guj, and F. Stella, Phys. Fluids **8**, 1181 (1996).

- 
- [70] A. Noullez, G. Wallace, W. Lempert, R. B. Miles, and U. Frisch, *J. Fluid Mech.* **339**, 287 (1997).
- [71] S. G. Saddoughi and S. V. Veeravalli, *J. Fluid Mech.* **268**, 333 (1994).
- [72] J. Herweijer and W. van de Water, in *Advance in Turbulence V*, edited by R. Benzi (Kluwer Academic Publishers, New York, 1995), p. 210.
- [73] R. Kerr, *J. Fluid Mech.* **153**, 31 (1985).
- [74] O. N. Boratav, *Phys. Fluids* **9**, 1206 (1997).
- [75] M. Ould-Rouis, R. A. Antonia, Y. Zhu, and F. Anselmet, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2222 (1996).
- [76] S. Chen, K. R. Sreenivasan, M. Nelkin, and N. Cao, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2253 (1997).
- [77] V. S. L'vov and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3541 (1996).
- [78] A. L. Fairhall, B. Dhruva, V. S. L'vov, I. Procaccia, and K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3174 (1997)
- [79] A. L. Fairhall, V. S. L'vov, and I. Procaccia, *Europhys. Lett.* **43**, 277 (1998).
- [80] R. Benzi, L. Biferale, G. Ruiz-Chavarria, S. Ciliberto, and F. Toschi, *Multiscale velocity correlation in turbulence: experiments, numerical simulations, synthetic signals*, Preprint, [chaos-dyn/9811021](https://arxiv.org/abs/chaos-dyn/9811021).

## Danksagung

Es ist mir eine Freude und eine Pflicht, hier allen zu danken, die zum Entstehen dieser Arbeit direkt oder indirekt beigetragen haben.

Besonderer Dank gebührt dabei meinem Doktorvater Prof. Dr. Siegfried Großmann sowie Prof. Dr. Detlef Lohse für die angenehme und wertvolle Betreuung.

Sehr hilfreich für die Erstellung dieser Arbeit war das angenehme Klima in der Arbeitsgruppe.

Die notwendigen Computersimulationen wurden größtenteils auf der CRAY Y-MP8/864 bzw. CRAY T90 IEEE des HLRZ Jülich und auf dem Parallelrechner IBM RS6000 SP des Rechenzentrums der Universität Marburg durchgeführt.

Diese Dissertation wurde gefördert vom Sonderforschungsbereich 185 „Nichtlineare Dynamik“.

Ich danke meiner Familie, die mein Studium in jeder erdenklichen Weise unterstützt hat.